Clase 10 | 06/04/2016. (1)

EJERCICIO. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{(2x-1)^2 - 4}$$

Determine Dom(f) y Rec(f). Es f inyectiva? Sobreyectiva? Si puede restringir para que lo sea?

a) Dom(f). Se necesita que

$$(2x-1)^2 - 4 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4x^2 - 4x + 1 - 4 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4x^2 - 4x - 3 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 3/4 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x - 3/2)(x + 1/2) \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, -1/2] \cup [3/2, \infty)$$

b) Rec(f). Debemos encontrar todos los valores de $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Entonces,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow y = \sqrt{(2x-1)^2 - 4}, \quad y \geq 0.$$

$$\Rightarrow y^2 = (2x-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y^2 + 4 = (2x-1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2+4} = |2x-1|$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \pm\sqrt{y^2+4}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{y^2+4}\right)$$

No existen restricciones adicionales, entonces

$Rec(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

c) Análisis de inyectividad. Sean $a, b \in Dom(f)$ tales que $f(a) = f(b)$. Entonces

$$\Rightarrow \sqrt{(2a-1)^2-4} = \sqrt{(2b-1)^2-4}$$
$$\Rightarrow (2a-1)^2-4 = (2b-1)^2-4$$
$$\Rightarrow (2a-1)^2 = (2b-1)^2$$
$$\Rightarrow |2a-1| = |2b-1|$$
$$\Rightarrow 2a-1 = 2b-1 \quad o \quad 2a-1 = -(2b-1)$$
$$\Rightarrow \boxed{a=b} \quad o \quad \boxed{a=-b+1}$$

Conclusión. f no es inyectiva. En efecto, nótese que

$$f(-1/2) = 0 = f(3/2)$$

Sin embargo, f se puede restringir para garantizar inyectividad. La situación problemática es $a = -b+1$. Entonces.

$$f_1 : (-\infty, -1/2] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

$$f_2 : [3/2, \infty) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Son inyectivas.

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f no es inyectiva
- f no es sobreyectiva.

Restricción. $\tilde{f}: [3/2, \infty) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$x \longmapsto \sqrt{(2x-1)^2-4}$$

es inyectiva y sobreyectiva $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ es biyectiva.

Cuál es su inversa?

$$\tilde{f}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{x^2+4}\right)$$

$$\tilde{f}^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [3/2, \infty[. \quad \boxtimes$$

EJERCICIO. Estudie la función

$$f(x) = \frac{|x| - 6}{|x| - 2}.$$

Solución.

1. Dom(f). Se necesita que $|x| - 2 \neq 0$.

$$\Rightarrow x \neq 2 \text{ y } x \neq -2.$$

2. Paridad. $f(-x) = \dfrac{|-x|-6}{|-x|-2} = \dfrac{|x|-6}{|x|-2} = f(x)$

$\Rightarrow$ f es una función par.

3. Es f inyectiva? No, pues la función es par

$$f(x) = f(-x). \ \forall x \in \text{Dom}(f).$$

4. ¿Se puede restringir f tal que sea inyectiva?

Sean $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que $f(a) = f(b)$. Entonces

$$\frac{|a|-6}{|a|-2} = \frac{|b|-6}{|b|-2}$$

$$\Rightarrow (|a|-6)(|b|-2) = (|a|-2)(|b|-6)$$

$$\Rightarrow |ab| - 2|a| - 6|b| + 12$$
$$= |ab| - 6|a| - 2|b| + 12$$

$$\Rightarrow 2|a| + 6|b| = 6|a| + 2|b|$$

$$\Rightarrow |a| = |b|$$

$$\Rightarrow \boxed{a = b} \quad o \quad \boxed{a = -b.}$$

La situación $a = -b$ impide la inyectividad. Entonces

$$f_1 : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

$$f_2 : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

son restricciones inyectivas de f.

5. ¿Es f sobreyectiva? Debemos encontrar $\mathrm{Rec}(f)$. Si $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$ f es sobreyectiva.

Sea $y = f(x)$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$

$$y = \frac{|x|-6}{|x|-2}$$

$$\Rightarrow y(|x|-2) = |x|-6.$$

Distinguimos dos situaciones.

1. $x > 0$: $y(x-2) = x-6$

$$\Rightarrow x(y-1) = 2y-6$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y-6}{y-1} = \frac{2(y-3)}{y-1}$$

Nótese que $y \neq 1$. Además, $x > 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

2. $x < 0$: $y(-x-2) = -x-6$

$$x(-y+1) = 2y-6$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y-6}{-y+1} = \frac{2(y-3)}{1-y}$$

Nótese que $y \neq 1$. Además, $x < 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

Entonces $f: Dom(f) \to \mathbb{R}$ no es sobreyectiva, pues $Rec(f) = \mathbb{R} \setminus [1, 3)$

Sin embargo, $f: Dom(f) \to \mathbb{R} \setminus [1,3)$ es sobreyectiva.

6. f no es biyectiva pues f no es inyectiva ni tampoco sobreyectiva. Sin embargo

$$f: [0, \infty) \to \mathbb{R} \setminus [1, 3) \quad \text{es biyectiva}$$
$$x \longmapsto \frac{|x|-6}{|x|-2}$$

Donde la función inversa está definida por (6)

$$f^{-1}(x) : \mathbb{R}\setminus[1,3) \longrightarrow [0,\infty)$$

$$x \longmapsto \frac{2(x-3)}{x-1}$$ $\blacksquare$