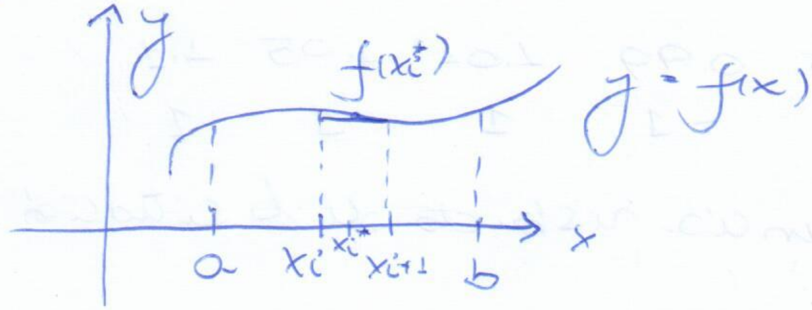
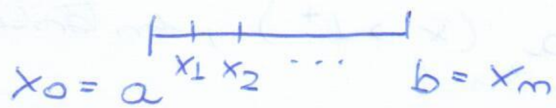
Clase 11 | 11/04/2016.

§ 3. Límites y Continuidad.

§ 3.1 Necesidad del concepto de límite.





$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\text{área} \approx \sum f(x_i^*) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_i}$$

¿Cuál es el valor exacto del área?

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i^*) \Delta x_i$$

Esta situación, introduce el concepto de límite.

Heurísticamente. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ¿Cómo se comporta $f(x)$ para valores de x cercanos a 1?

Considere la siguiente tabla:

x	0.9	0.95	0.99	1.01	1.05	1.1
$f(x)$	1.9	1.95	1.99	2.01	2.05	2.1

Nótese que, a medida que x se acerca a 1 ($x \to 1$), $f(x)$ se acerca a 2 ($f(x) \to 2$). Se dice que el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 1 es 2.

Notación: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$

Nótese que $x = 1$ no admite evaluación en f, pues $1 \notin \mathrm{Dom}(f)$

En este caso, el límite existe.

2. Considere $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

Se diseña la siguiente Tabla

x	0.9	0.95	0.99	1.01	1.05	1.1
$h(x)$	-1	-1	-1	1	1	1.

Existe una gran diferencia respecto de la situación anterior. Nótese que:

- Si x tiende a 1 por la derecha ($x \to 1^+$), entonces $h(x) \to 1$
- Si x tiende a 1 por la izquierda ($x \to 1^-$), entonces $h(x) \to 1$.

En este caso, se dice que

$$\lim_{x \to 1} h(x) \text{ no existe.}$$

<u>Definición</u> (límite) Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" es L,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si $f(x)$ toma valores tan cercanos como se quiera al valor L cuando x es suficientemente cercano de a.

EJEMPLOS.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{3}{2}.$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{8x-3x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2-3x)}{\cancel{x-2}} = -4$

3. $\lim_{x \to 1} [x]$ no existe ($\nexists$).

§ 3.2 El concepto de Límite.

Definición (límite) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" es $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |x - a| < \delta \wedge x \in D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nota: Para calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, no es necesario que $f(a)$ esté definida.

EJEMPLOS.

1. $\lim_{x \to 2} x + 1 = 3$.

Demostración. Se tiene que probar que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x+1-3| < \varepsilon.$$

Nótese que $|x+1-3| = |x-2| < \delta$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, se puede escoger $\delta = \varepsilon$ ▨

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$.

Demostración. Se tiene que probar que, para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede escoger $\delta > 0$ tal que

$$|x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2-x-2}{x-2} - 3 \right| < \varepsilon.$$

Nótese que

$$\left| \frac{x^2-x-2}{x-2} - 3 \right| = \left| \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}} - 3 \right|$$

$$= |x-2| < \delta.$$

Entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$ se puede considerar $\delta = \varepsilon$ ∎

3. $\lim\limits_{x \to 2} x^2+x+1 = 7.$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, se debe probar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x^2+x+1-7| < \varepsilon.$$

Nótese que

$$|x^2+x+1-7| = |x^2+x-6| = |(x+3)(x-2)|$$
$$\leq |x+3| \cdot \delta.$$

¿Cómo se puede acotar el factor $|x+3|$?

Se sabe que $|x-2| < \delta$. Considere dos factores δ_1 y δ_2 tales que $|x-2| < \delta_1 = 1$ y $|x-2| < \delta_2$. Entonces,

$$|x-2| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \qquad / +5$$
$$\Rightarrow 4 < x+3 < 6$$
$$\Rightarrow |x+3| < 6.$$

De esta forma,

$$|(x+3)(x-2)| < 6 \cdot |x-2| < 6 \cdot \delta_2$$

Se podría escoger $\delta_2 = \varepsilon/6$. Recordemos que $\delta_1 = 1$. Entonces,

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$
$$= \min\{1, \varepsilon/6\}. \blacksquare$$

4. $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Demostración. Consideremos dos casos.

1. $a = 0$. Entonces

$|\sqrt{x} - a| = |\sqrt{x}| < \varepsilon$ siempre que $0 < x^2 < \varepsilon^2 = \delta$.

y $x \in \text{Dom}(f)$. Vale decir se puede tomar $\delta = \varepsilon^2$.

2. $a > 0$. Nótese que $\forall x \geq 0$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} (\sqrt{x} - \sqrt{a}) = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{a}}$$

Para $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta < \sqrt{a}\,\varepsilon$.

Proposición. Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0.$$

Teorema (Unicidad del límite). Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x \to a} f(x) = L_2,$$

entonces $L_1 = L_2$.

Demostración. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ ⑥

$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

De esta forma,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad L_1 \equiv L_2.$

De lo contrario tome $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$, entonces

$$|L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2} \Rightarrow \frac{|L_1 - L_2|}{2} < 0$$
$$\Rightarrow L_1 = L_2 \quad \blacksquare$$

Límites Laterales.

Def (límite lateral derecho) Sea f definida $\forall x \in I =]a, c[$. Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a "a" por la derecha es L,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : a < x < a + \delta$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Def (límite lateral izquierdo) Sea f definida $\forall x \in J =]d, a[$. Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a "a" por la izquierda es L,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

Teorema. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si

$\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y son iguales.

EJEMPLO.

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ no existe.