

Clase 12

(1)

De la clase pasada:

Def (Límite) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" es $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \wedge x \in D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Proposición. Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0.$$

Esta clase:

Teorema (Unicidad del límite). Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$$

entonces $L_1 = L_2$.

Demostración. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De esta forma, se puede concluir que:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2,$$

Si se podría considerar $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$, entonces (2)

$$|L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2} \Rightarrow \frac{|L_1 - L_2|}{2} < 0$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2 \quad \square$$

Límites Laterales.

Def. (límite lateral derecho) Sea f def. $\forall x \in I =]a, c[$.
Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a "a" por la derecha es L ,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Def. (límite lateral izquierdo) Sea f def. $\forall x \in J =]d, a[$.
Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a "a" por la izquierda es L ,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema (límites laterales). $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existen y son iguales a L .

Demostración. Teorema (Ver Notas).

EJEMPLOS.

(3)

1. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ no existe.

Demostación. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x} = -1. \quad \text{Entonces,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \text{ no existe.}$$

2. Si $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x < 1 \\ 3x+2a, & x \geq 1 \end{cases}$

¿Qué valor debe tener a para que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista?

Demostación. Para que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista, se necesita que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x+2a = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax+1$$

$$\Rightarrow 3+2a = a+1$$

$$\Rightarrow \underline{a = -2}$$

§ 3.3. Álgebra de Límites.

Sean $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

Entonces, si satisfacen las siguientes propiedades:

1. (Multiplicación) $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda L_1$.

2. (Suma o diferencia) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$.

3. (Producto) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$.

4. (Cociente) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, siempre que $L_2 \neq 0$.

5. (Potencia) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L_1^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

6. (Raíz) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Notase que se requiere que $L_1 \geq 0$ y $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

EJEMPLOS.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{2x+6} + 4}{\sqrt{2x+6} + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x+6) - 16}{(x-5)(\sqrt{2x+6} + 4)} = 2 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\cancel{x-5}}{(\cancel{x-5})(\sqrt{2x+6} + 4)} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Demostremos. Supongamos que el límite existe y es igual a L .

Considera el límite.

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = L \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ por la unicidad del límite se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$ no

existe. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Teorema (Límite de la composición) Suponga que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = a$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (f \circ g)(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) \\ &= L. \end{aligned}$$

EJEMPLOS

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x-64}{\sqrt[3]{x}-4}$

Solución. Considera $u = \sqrt[3]{x}$. Así

$$x \rightarrow 64 \Rightarrow u \rightarrow 4$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x-64}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{u \rightarrow 4} \frac{u^3-64}{u-4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 4} \frac{(n-4)(n^2+4n+16)}{n-4} = \lim_{n \rightarrow 4} n^2+4n+16 \quad (6) \\ = 48.$$

EJERCICIO.

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$

Solución. Calculamos ambos límites separadamente, asumiendo que existen. De la forma siguiente

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1 - (\sqrt[3]{x^3+x+1} - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1} - 1}{x} \end{aligned}$$

Suponemos que ambos límites existen y calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1} + 1}{\sqrt{x^2+x+1} + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x+1-1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3+x+1} + 1}{\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3+x+1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x+1-1}{x \cdot () \cdot ()} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2+1)}{x \cdot () \cdot ()} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} () = \lim_{x \rightarrow 0} () - \lim_{x \rightarrow 0} () = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$