Clase 13 | 27/04/2016.

Teorema (Teorema del Acotamiento o Sandwich).
Sean $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ en una vecindad de $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

entonces, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L.

EJEMPLOS.

1. Calcule $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

Solución.
Se sabe que $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Además, $\lim_{x \to 0} -x = 0 = \lim_{x \to 0} x$. En conclusión,
se tiene que $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2 - 2x + \sin(\pi x)}$.

Solución. Usamos, nuevamente, que

$$-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, se tiene que

$$3x^2-2x-1 \le 3x^2-2x+\sin(\pi x) \le 3x^2-2x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x^2-2x+1} \le \frac{1}{3x^2-2x+\sin(\pi x)} \le \frac{1}{3x^2-2x-1}$$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1/3,0\}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3x^2-2x+1} \le \frac{x^2}{3x^2-2x+\sin(\pi x)} \le \frac{x^2}{3x^2-2x-1}$$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1/3,0\}$

Además, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{3x^2-2x+1} = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{3x^2-2x-1}$

En conclusión, el Teorema de Acotamiento implica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2-2x+\sin(\pi x)} = 0.$$

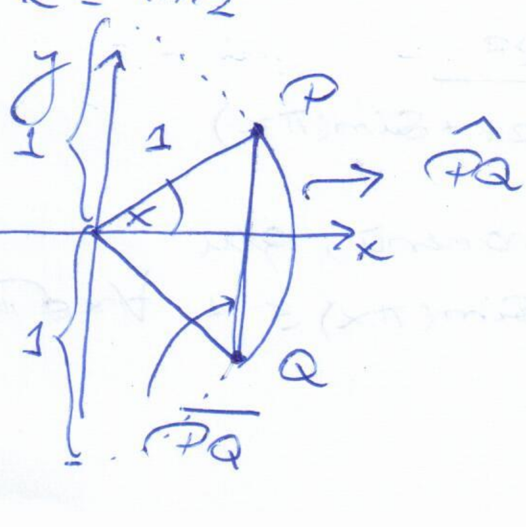
§3.4. Límites Trigonométricos.

EJERCICIO. Demuestre que

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a \quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

Demostración. Primero probamos que $|\sin x| \le |x| \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Caso 1. $0 \le x \le \pi/2$



Es claro que $\overline{PQ} \le \widehat{PQ}$.

Ahora, $\overline{PQ} = 2\sin x$ y $\widehat{PQ} = 2x$

$$\Rightarrow \quad 2\sin x \leq 2x$$
$$\Rightarrow \quad \sin x \leq x$$
$$\Rightarrow \quad |\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Caso 2. $x \geq \pi/2$. En este caso

$$|\sin x| \leq 1 < \pi/2 \leq x = |x|$$

Por lo tanto, $|\sin x| \leq |x| \ \forall x \geq \pi/2$

Caso 3. $x < 0$. Aquí, $-x > 0$, luego

$$|\sin x| = |-\sin x| = |\sin(-x)| \leq |-x| = |x|$$
$$\Rightarrow |\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, demostremos que

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Se tiene que

$$|\cos x - \cos a| = \left| -2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|$$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|$$

Por lo tanto si $|x-a| < \varepsilon$ se tiene que

$$|\cos x - \cos a| < \varepsilon,$$

es decir basta escoger $\delta = \varepsilon$ ∎

2. Calcular $\lim_{x\to a} \sin x$.

Solución. Usamos que $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$.

Escribe $\sin x = \cos(x - \pi/2)$. Ahora,

considere $f(x) = \cos x$ y $g(t) = t - \pi/2$.

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{t\to t_0} g(t) = t_0 - \pi/2.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} \sin x = \lim_{x\to a} \cos(x - \pi/2)$$

$$= \lim_{t\to a-\frac{\pi}{2}} \cos t = \cos(a - \pi/2)$$

$$= \cos a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

3. Calcular $\lim_{u\to \pi/3} \dfrac{1 - 2\cos u}{\sin(u - \pi/3)}$.

Solución. Sustitución $u - \pi/3 = x$. Entonces

$$u \to \pi/3 \Rightarrow x \to 0,$$

y $\lim_{u\to\pi/3} \dfrac{1-2\cos u}{\sin(u-\pi/3)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 - 2\cos(x+\pi/3)}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos(x)\cos(\pi/3) + 2\sin(x)\sin(\pi/3)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} + \lim_{x\to 0} \sqrt{3}\,\frac{\sin(x)}{\sin(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} + \sqrt{3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)} + \sqrt{3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^{\cancel{2}} x - \sin x}{\cancel{\sin} x\,(1+\cos x)} + \sqrt{3} = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

4. Tarea. Demuestre que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin}{x} = 1$

Ver Notas.
Este límite es importante.

§ 3.5. Límites al Infinito.

Consideramos la situación en que, cuando $x \to x_0$, los valores $f(x)$ crecen o decrecen indefinidamente.

Si $f(x)$ crece indef., decimos que $f(x)$ tiende a $+\infty$.
Si $f(x)$ decrece indef, decimos que $f(x)$ tiende a $-\infty$.

Def. Sea f definida en una vecindad de $a \in \mathbb{R}$.
Se dice que:

1. f tiende a infinito, cuando x tiende a "a",

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

si y sólo si

$\forall N>0, \exists \delta>0: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>N.$

2. f tiende a menos infinito, cuando x tiende a "a" si y sólo si

$\forall N<0, \exists \delta>0: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<N.$

Nota: En ambos casos se dice que el límite no existe. pues $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$.

EJEMPLO.

1. Demuestre que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Solución. Sea $N>0$. Entonces, si $|x-0|<\delta$

$\Leftrightarrow |x|<\delta \Rightarrow x^2<\delta^2$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = N$

Por lo tanto, basta tomar $1/\delta^2 = N$, es decir $\delta = 1/\sqrt{N}$.

Def. 1. Se dice que $L\in\mathbb{R}$ es el límite cuando $x\to\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si y sólo si

$\forall \varepsilon>0, \exists N>0: x\geq N \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$

2. Se dice que $L\in\mathbb{R}$ es el límite cuando $x\to-\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -L$ si y sólo si

$\forall \varepsilon>0, \exists N<0: x\leq N \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$

EJEMPLO.

1. Demuestre $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \geq 1 : 0 < \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x}$,

pues $x^n \geq x$. Sea $\varepsilon > 0$:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| = \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{si } x > 1/\varepsilon.$$

Considere $N = \max\{1, 1/\varepsilon\}$ ▨