CLASE 14 | (1)

§ 3.5. Límites al Infinito.

Consideremos la situación en que, cuando $x \to$ los valores de $f(x)$ crecen o decrecen indefinidamente.

- Si $f(x)$ crece indefinidamente, diremos que $f(x) \to +\infty$.
- Si $f(x)$ decrece indefinidamente, diremos que $f(x) \to -\infty$.

Definición. Sea f definida en una vecindad de $a \in \mathbb{R}$. Se dice que

1. f tiende a infinito, cuando x tiende a "a",

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

si y sólo si
$\forall N > 0, \exists \delta > 0: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N.$

2. f tiende a menos infinito, cuando x tiende a "a"

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si y sólo si
$\forall N > 0, \exists \delta > 0: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N.$

Nota. En ambos casos se dice que el límite no existe, pues $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$.

EJEMPLO.

1. Demuestre que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Solución. Sea $N>0$. Entonces, si $|x-0|<\delta$

$$\iff |x| < \delta \Rightarrow x^2 < \delta^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = N$$

Basta tomar $\delta = 1/\sqrt{N}$ para concluir que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. $\boxtimes$

Definición. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de f cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si y solo si

$$\forall\, \varepsilon>0\ \exists N>0 : x \geq N \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$

Análogamente se define el límite de f cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO.

1. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} x^{-n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para todo $n\in\mathbb{N}$ y $x \geq 1$ se tiene que

$$x \leq x^n$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x} < \varepsilon$$

si $x > 1/\varepsilon$. Por lo tanto $N = \max\{1, 1/\varepsilon\}$. $\boxtimes$

§ 3.5.1 El número e como límite.

Def. Definimos el número de Euler como
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Nota: Considere el cambio de variable $u = 1/x$, entonces el límite se puede escribir, equivalentemente, como
$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e.$$

EJEMPLO.

1. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Solución.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot$$
$$\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \underset{u=\frac{2}{x-1}}{=} \lim_{u\to 0}\left((1+u)^{1/u}\right)^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right).$$
$$= e^2\cdot 1 = e^2.$$

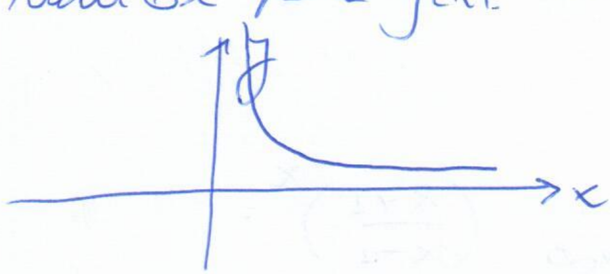
§ 3.6. Asíntotas.

Este concepto surge como una aplicación de límites al ∞

Definición. La recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si se satisface alguna de las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \; ; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

EJEMPLO. $f(x) = 1/x$. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$ es una asíntota vertical para $f(x)$. Gráficamente



Definición. Sea $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función. Si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \quad L \in \mathbb{R}$$

entonces, la recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de f.

EJEMPLO. Considere $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x}$. Estudie asíntotas.

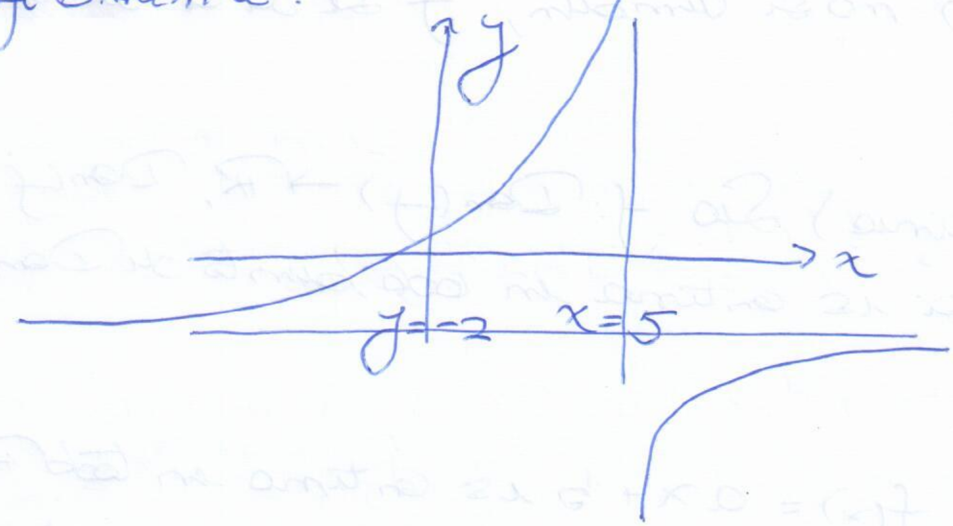
Solución. Primero, $x = 5$ es una asíntota vertical, dado que

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x+3}{5-x} = \infty .$$

Ahora, $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{5}{x} - 1} = -2$$

$\Rightarrow$ $y = -2$ es una asíntota horizontal.

Gráficamente.



§ 3.7. Continuidad

Considere las funciones

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ -3, & x=0\end{cases} \quad y \quad g(x)=x^2+2x+5$$

1) En ambos casos, $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)$ existen.

En efecto,
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} g(x)=5$$

Pero,
$$f(0)=-3\neq \lim_{x\to 0} f(x)=1$$
$$g(0)=5=\lim_{x\to 0} g(x)=5.$$

La continuidad llega en esta situación.

Definición (Continuidad en un punto) Supongamos que f está definida en una vecindad de "a". Se dice que f es continua en "a" si:

i) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

ii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

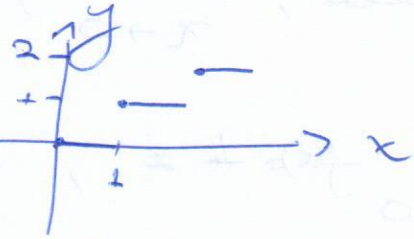
Si i) o ii) no se cumplen, f se dice discontinua en $x = a$.

Def (función continua) Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$
f es continua si es continua en todo punto de $\mathrm{Dom}(f)$.

EJEMPLOS.

1. $a, b \in \mathbb{R}$. $f(x) = ax + b$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pues $\lim_{x \to x_0} ax+b = ax_0 + b = f(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Los polinomios de grado n son continuas en todo $\mathbb{R}$.
3. Las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$.
4. La función $f(x) = [x]$ es continua en $]s, s+1[$ $\forall s \in \mathbb{Z}$ y discontinua en $s \in \mathbb{Z}$



5. La función $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

no es continua pues $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

6. Determine A y $B \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\pi/2 \\ A\sin x + B, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \geq \pi/2. \end{cases}$

f es continua en $(-\infty, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, \infty)$.

$\lim_{x \to -\pi/2} f(x)$: $\quad -2(-1) = -A + B$

$$A + B = 0$$
$$\Rightarrow A = -1, \ B = 1.$$