Clase 15 | 04/05/2016

De la clase pasada.

Continuidad. Se dice que f es continua en $a \in \mathbb{R}$ si se satisface las siguientes condiciones:

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si alguna condición no se verifica $\Rightarrow$ f es discontinua en a.

f se dice continua si es continua en cada punto de $\text{Dom}(f)$.

EJEMPLO. Determine $A, B \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\pi/2 \\ A\sin x + B, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

Solución. f es continua en $(-\infty, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$, y $(\pi/2, \infty)$ pues $\sin x$ y $\cos x$ son funciones continuas.

Continuidad en $-\pi/2$: $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f(\frac{-\pi}{2})$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} -2\sin x = 2$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} A\sin x + B = -A + B$$

$$\Rightarrow \quad -A + B = 2$$

Nótese que $f(-\pi/2) = +2$.

Continuidad en $\pi/2$: $\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = f(\pi/2)$ (2)

$$\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2} A\sin x + B = A+B$$

$$\lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to\pi/2} \cos x = 0.$$

$\Rightarrow \quad A+B=0.$ Nótese que $f(\pi/2)=0.$

Entonces, $\begin{array}{r} -A+B=2 \\ A+B=0 \end{array} \Big| \Rightarrow \begin{array}{l} B=1 \\ A=-1. \end{array}$

§3.7.1 Álgebra de funciones continuas

Teorema (álgebra de funciones continuas) Sean f, g funciones continuas en $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $f+g$ es continua en a.
2. $f-g$ es continua en a.
3. $f\cdot g$ es continua en a.
4. f/g es continua en a, siempre que $g(a)\neq 0$.

EJEMPLOS.

1. $f(x)=\sin(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$

Entonces $h_1(x) = 3\sin x - 5\cos x$ es continua en $\mathbb{R}$.

$h_2(x) = \sin x \cdot \cos x$ es continua en $\mathbb{R}$.

$h_3(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. $f(x) = \dfrac{(x+5)\cdot(x^2+x+1)}{(x+1)(x+5)}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-1,-5\}$.

Teorema (Límites y continuidad) Sea f continua en a. Si g es tal que $\lim_{x \to b} g(x) = a$.

Entonces,

$$\lim_{x \to b} f(g(x)) = f(a),$$

es decir

$$\lim_{x \to b} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to b} g(x)\right)$$
$$= f(a)$$

Nota. Se dice que el límite puede ingresar al argumento de la función.

EJEMPLOS

1. Sea $h(x) = \sqrt{8 + x^2}$ Calcular $\lim_{x \to 1} h(x)$

Solución.

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{8 + x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 1} 8 + x^2} = \sqrt{9}$$
$$= 3.$$

2. Calcule $\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = 0.$

Solución.

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to 0} x + 1\right) = \ln(1) = 0.$$

Teorema (Composición de funciones continuas).
Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones.
Si f es continua en $a \in D$ y g es continua en $f(a) \in E$ entonces $g \circ f$ es continua en a, y

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$
$$= g(f(a)).$$

Demostración. g es continua en $f(a)$. Entonces, existe $\rho > 0$ tal que
$$|y - f(a)| < \rho \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Otra, f es continua en a. Entonces, existe $\delta > 0$
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \rho$$

Entonces, si
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \rho$$
$$\Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$
$$\Rightarrow g \circ f \text{ es continua en } a. \quad \blacksquare$$

Nota: Composición de funciones continuas es continua.

EJEMPLOS.

1) Si f es continua $\xrightarrow{\text{en } a}$ $|f|$ es continua en a

2) Si f es continua $\xrightarrow{\text{en } a}$ $\sqrt{|f|}$ es continua en a.

Def. (Continuidad por la derecha) f es continua por la derecha en a si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ existe ($a \in Dom(f)$);
2. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

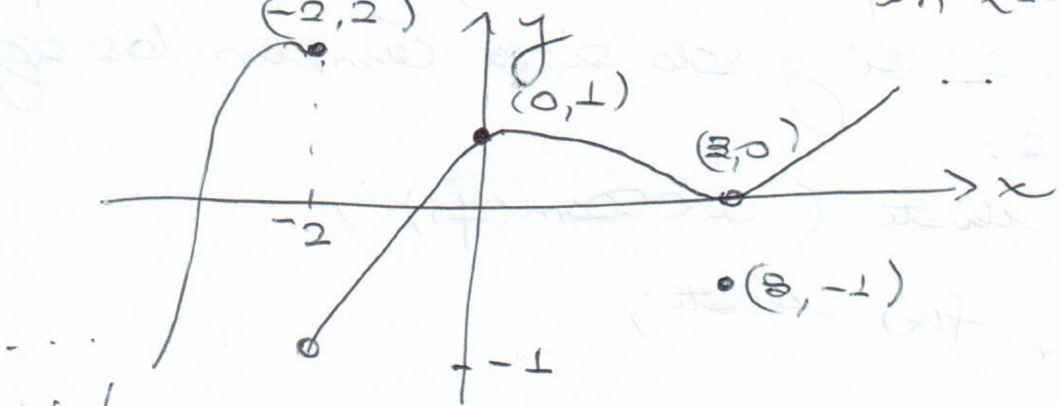
Def (Continuidad por la izquierda) f es continua por la izquierda en a si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ existe ($a \in Dom(f)$);
2. $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Def. (Continuidad en intervalo cerrado) $f: Dom(f) \to \mathbb{R}$ tal que $[a,b] \subseteq Dom(f)$. f es continua en $[a,b]$ si y solo si es continua en (a,b)
es continua por la derecha en a
es continua por la izquierda en b.

§ 3.7.2 Tipos de discontinuidad.

EJEMPLO. Estudia Continuidad de la Siguiente función en $x=-2$, $x=0$ y $x=3$.



Solución.

$x=-2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe

$\Rightarrow f$ es discontinua en $x=-2$.

$x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$

$\rightarrow f$ es continua en $x = 1$.

$x=3$: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$ Pero $f(3) = -1$

Notése que: 1) la discontinuidad en $x=-2$ es del tipo Salto. No podemos modificar f tal que sea continua en $x=-2$.

2) La discontinuidad en $x=3$ se puede remover. Basta modificar $f(3)=0$.

Definición. (Discontinuidad reparable y no reparable)

f tiene una discontinuidad reparable en a si
$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe.}$$

f tiene una discontinuidad irreparable en a si
$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ no existe.}$$