Clase 16

De la clase pasada. Tipos de discontinuidad.

Dada $f: \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ que no es continua en $a \in \mathbb{R}$.
Se dice que:

1. f tiene una discontinuidad reparable en a si existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

2. f tiene una discontinuidad inreparable en a si $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

EJEMPLOS.

1) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & 1 < x \leq 2 \\ \frac{a-2}{x+2}, & x > 2. \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en $x = 0$?

b) ¿Es f continua en $x = 1$?

c) Determine a tal que f sea continua en el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ posible.

d) ¿Es posible hacer f continua en $\mathbb{R}$?

Solución.

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 - x^2 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 2 = 2$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x)$ no existe $\Rightarrow f$ no es continua en $x = 0$.

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} 2 = 2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1) \rightarrow f$ es continua en $x = 1$.

c) f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$ (2)

f es continua en $x=1$

Continuidad en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{a-2}{x+2} = \frac{a-2}{4}$$

Se necesita que $0 = \frac{a-2}{4} \Rightarrow a = 2.$

Si $a = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$

$\Rightarrow f$ es continua en $x=2$.

d) No, pues existe una discontinuidad irreparable en $x = 0$. $\blacksquare$

2) Estudie la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{x^3}{\sin(x^2)}, & 0<x<1 \end{cases}$

Solución. Primero, notar que cuando $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ la función es continua pues polinomios y $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; $\sin(x^2)$ son continuos.

Continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin(x^2)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0. \Rightarrow f \text{ es continua en } x=0.$$

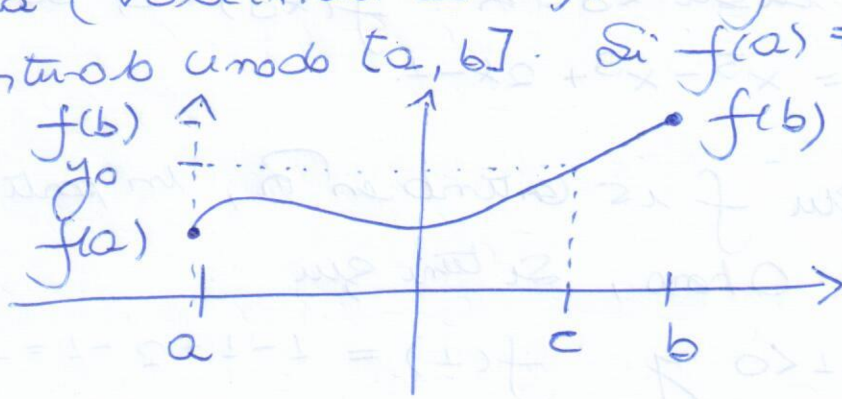
$$0 \le \left| x^2 \cos\frac{1}{x} \right| \underset{|\cos 1/x| \le 1}{\le} x^2\cdot 1 \to 0$$

Ahora, $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x^2}\cdot x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}\cdot x = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}}\cdot \lim_{x\to 0} x = 1\cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

§ 3.7.3. Teorema de funciones continuas en intervalos cerrados.

Teorema (Valor intermedio). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si $f(a) \neq f(b)$

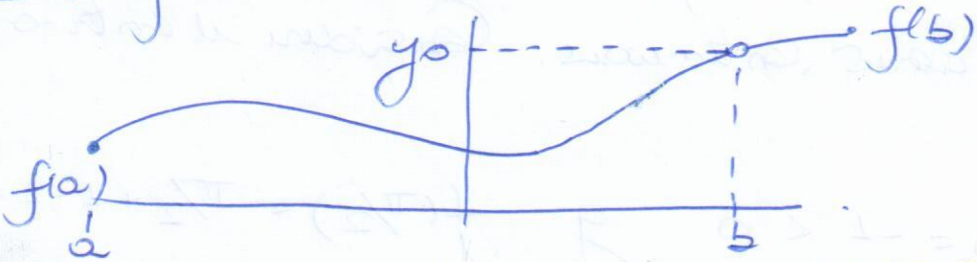


Entonces, para cada valor $y_0 \in (f(a), f(b))$, existe un número $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = y_0.$$

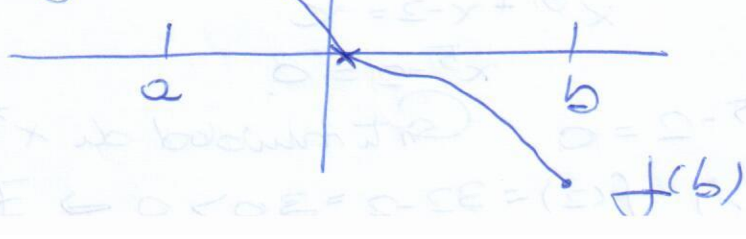
Nota: Geométricamente este teorema dice que todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ están en el recorrido de f.

Qué pasa si f es discontinua?



Para tal valor de $y_0 \in (f(a), f(b))$ no existe $c \in (a,b)$ tal que $y_0 = f(c)$.

Corolario (Teorema de Bolzano). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos.



Entonces, $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

EJEMPLOS.

1. Demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) = 0$, donde
$$f(x) = x^5 - x^3 + 2x - 1.$$

Solución. Nótese que f es continua en $\mathbb{R}$, en particular en el intervalo $[0,1]$. Ahora, se tiene que
$$f(0) = -1 < 0 \quad y \quad f(1) = 1 - 1 + 2 - 1 = 1 > 0$$
$\Rightarrow \exists\, c_0 \in (0,1)$ tal que $f(c_0) = 0$, es decir, c_0 es una raíz del polinomio.

2. Sea $f(x) = x + \sin x - 1$. Probar que al menos existe una raíz real de la ecuación $f(x) = 0$.

Solución. Nótese que f es continua en $\mathbb{R}$, pues es suma de funciones continuas. Considere el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Se tiene que
$$f(0) = -1 < 0 \quad y \quad f(\pi/2) = \pi/2 + 1 - 1 = \pi/2 > 0.$$
$\Rightarrow \exists\, c_0 \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c_0) = 0$.

3. Considere la curva $y = x^5 + x - 2$. ¿Es posible que la recta $y = x$ intersecte a esta curva?

Solución. Equivalente a determinar si $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tal que
$$x^5 + x - 2 = x$$
$$x^5 - 2 = 0.$$
$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$: $x^5 - 2 = 0$ Continuidad de $x^5 - 2$ en $\mathbb{R}$
y $f(0) = -2$ y $f(2) = 32 - 2 = 30 > 0 \Rightarrow \exists\, x$ ...

Teorema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Entonces f es acotada, es decir

$$\exists\, M>0: \ |f(x)|\le M \quad \forall x\in[a,b]$$

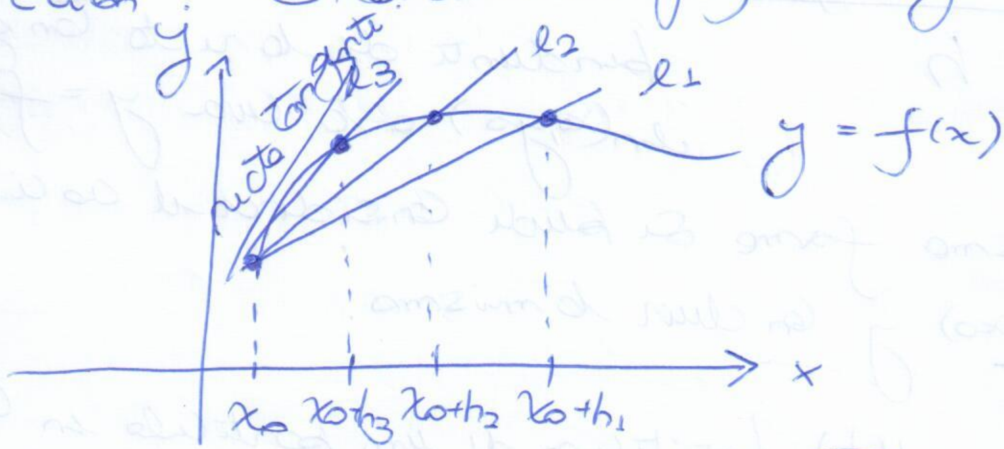
Además, $\exists\, x_0, x_1\in[a,b]$ tal que

$$f(x_0)\le f(x)\le f(x_1) \quad \forall x\in[a,b].$$

Función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

§4. Derivadas.

Introducción. Considere la gráfica de $y=f(x)$



y sean $x_0, x_0+h_1, x_0+h_2, x_0+h_3\in \mathrm{Dom}(f)$. Consideremos las rectas secantes l_1, l_2, l_3 que pasan por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h_i, f(x_0+h_i))$, $i=1,2,3$ (ver figura)

A medida que x_0+h_i está más cerca de x_0, las rectas modifican su pendiente y se aproximan a la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$)

La recta que pasa por (x_0, y_0) [$f(x_0)$] y $(x_1, f(x_1))$ se lee

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Considere $x_1 = x_0 + h$

$$\Rightarrow \quad y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

Desde acá se observa que

$\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ tiende, cuando $h \to 0$, a la pendiente de la recta tangente en (x_0, y_0) a la curva $y = f(x)$.

De la misma forma se puede considerar el cociente $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ y concluir lo mismo.

En física: $d(t)$ posición de una partícula en tiempo t.
Entonces, $\dfrac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0}$ es velocidad media de la partícula en (t_0, t_1).

§ 4.2. El concepto de Derivada.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Cuando $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalo abierto y $x_0 \in I$.
$f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0.