Clase 18 | 30/05/2016.

De la clase pasada.

- El concepto de derivada: Sea $I \subset \mathbb{R}$ abierto y $f: I \to \mathbb{R}$, se dice que f es derivable en x_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe. En tal caso, $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Nota: $f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0.

- Cambio de variables $x = x_0+h$ implica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

- EJEMPLOS.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1} \quad \forall x \geq 0.$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \operatorname{Sen} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{Cos} x$$

$$f(x) = \operatorname{Cos} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{Sen} x$$

- Interpretación geométrica. Recta tangente a la curva $y = f(x)$ en x_0 es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

- Resultado importante:

diferenciabilidad $\Rightarrow$ Continuidad.

§4.3. Álgebra de derivadas.

Teorema (Álgebra de derivadas) Sean f, g derivables en $x \in I$, donde I es abierto en $\mathbb{R}$. Entonces.

1. $\frac{d}{dx}(f \pm g)(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$

2. $\frac{d}{dx}(k f(x)) = k f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

3. $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$, $g(x) \neq 0$.

Demostración.

1. Ejercicio. 2. Ejercicio.

3. $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) g(x+h) - f(x) g(x+h) + f(x) g(x+h) - f(x) g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) (g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= f'(x) g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$

Demostración

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) g(x) - f(x) g(x+h)}{h \, g(x+h) g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))\cdot g(x)}{h\; g(x+h)\, g(x)} - \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h\; g(x+h)\, g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x+h)\,g(x)} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{f(x)}{g(x+h)\,g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x)}{g(x)^2} - g'(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x) f(x)}{g(x)^2}.$$

Aplicación de estos resultados.

Teorema (Derivadas de funciones trigonométricas).

1. $\frac{d}{dx}(\tan x)\ \sec^2 x$
2. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
3. $\frac{d}{dx}(\cot g\, x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x.$

Demostración.

1. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{Sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{Sen}^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x$

2. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\cdot \cos x + 1 \cdot \operatorname{Sen} x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$

3. y 4. EJERCICIO.

Teorema (Derivada de funciones logaritmo y exponencial)

1. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

2. $\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{x}$

3. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

4. $\frac{d}{dx}(b^x) = \ln b \cdot b^x$.

Demostración.

1. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

$\underset{y=\frac{x}{h}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{y}{x}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$

$= \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right) = \frac{1}{x}\cdot \ln e = \frac{1}{x}$.

2. $\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln b}\cdot\frac{1}{x}$

3. $\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right)$

$\underset{e^h-1=u}{\overset{\uparrow}{=}} e^x \cdot \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)} = e^x \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(u+1)}$

$= e^x \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{1/u}} \underset{u=\frac{1}{m}}{\overset{\uparrow}{=}} e^x \cdot \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} = e^x\cdot 1$

4. Ejercicio.

Nota. Nótese que si $b > 0$, $b \neq 1$.

$$\frac{d}{dx} b^x = \lim_{h \to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} \cdot b^x$$

$$= b^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

$\Rightarrow$ derivada de cualquier función exp. es proporcional a la exponencial.

§ 4.3.1. Regla de la cadena.

Este resultado permite encontrar la derivada de una composición de funciones.

Teorema (regla de la cadena). Si $y = f(u)$ es derivable de u y $u = g(x)$ es derivable de x, entonces

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

es derivable. Además,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Demostración. Idea

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x)) \, g'(x).$$

Nótese que se requiere que $g(x) - g(x+h) \neq 0$.

EJEMPLOS.

1. $\frac{d}{dx}(x^2-7x)^3$

Considere $f(t)=t^3$ y $g(x)=x^2-7x$.

Entonces

$$\frac{d}{dx}(f\circ g)(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$=3\,g(x)^2\cdot 2x$$

$$=3(x^2-7x)^2\cdot 2x.$$

2. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{Sen}(\ln(x^2+1))\right)$

$$=\operatorname{Cos}(\ln(x^2+1))\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x\operatorname{Cos}(\ln(x^2+1))}{x^2+1}$$

Formalmente, se necesita definir

$$f(x)=\operatorname{Sen}x\ ;\ g(x)=\ln x\ ;\ h(x)=x^2+1$$

y entonces

$$\frac{d}{dx}(f\circ g\circ h)=f'(g\circ h)(x)\cdot g'(h(x))\cdot h'(x).$$

3. $\frac{d}{dx}(x^x)$. Considere $y=x^x$

$$\ln y=x\ln x$$

$$y=e^{x\ln x}$$

$$\Rightarrow\ x^x=e^{x\ln x}$$

$$\frac{d}{dx}(x^x)=\frac{d}{dx}(e^{x\ln x})=e^{x\ln x}\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$