Razón de Cambio.

Definición de la derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Define $\Delta y := f(x) - f(x_0)$ y $\Delta x := x - x_0$. Entonces

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nótese que:

1) El incremento $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ muestra el cambio de la variable y.

2) El incremento $\Delta x = x - x_0 = h$ muestra el cambio de la variable x

Entonces $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

es una razón de cambio. Muestra el cambio de la variable "y" con respecto de el cambio de la variable "x".

Precisamente, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ muestra el cambio en y sobre el intervalo $(x_0, x_0 + \Delta x)$

¿Qué pasa si $\Delta x \to 0$? Se obtiene una razón de cambio instantánea:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

razón de cambio $\to$ razón de cambio instantánea.
$(\Delta x \to 0)$

Caso particular en que x denota el tiempo t,

$$\frac{dx}{dt}$$

corresponde a una rapidez de cambio.

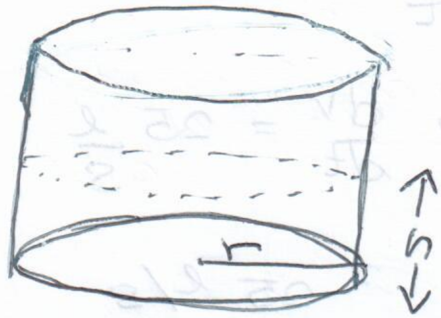
- Si $x = \phi(t)$ es la posición de un móvil en t
  $\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \phi'(t)$ es la velocidad instantánea en el tiempo t.

- Si $v = g(t)$ es la velocidad de un móvil en t
  $\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g'(t)$ es la aceleración instantánea del móvil en tiempo t.

EJEMPLO. A un depósito cilíndrico de base circular y 5m de radio, le entra agua a razón de 25 l/s. Calcular la rapidez a la que sube la superficie.

Solución.

¿Qué se pide? La rapidez a la que sube la altura del cilindro.



Datos: $r = 5\,m$

$h =$ desconocida

$\frac{dV}{dt} =$ razón de cambio del volumen $= 25\,\frac{l}{s}$

Se necesita $\frac{dh}{dt}$.

Nótese que:

- El volumen va cambiando. Razón de cambio $\frac{dV}{dt}$
- El altura va cambiando. Razón de cambio $\frac{dh}{dt}$
- El radio del cilindro permanece constante.

Ahora, volumen $V = \pi r^2 h$. Entonces.

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(\frac{d}{dt} r^2\right) h + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r^2} \frac{dV}{dt}$$

El volumen cambia a razón $\frac{dV}{dt} = 25 \frac{l}{s}$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi 25 m^2} \; 25 \, l/s$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot 2500 dm^2} \; 25 \frac{dm^3}{s}$$

$$\approx 0.0032 \frac{dm}{s}.$$

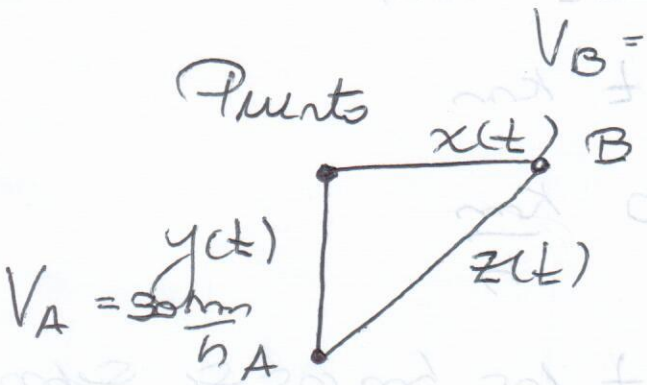
La rapidez con la que sube el agua es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi} \frac{dm}{s}$$

$$\approx 0.0032 \frac{dm}{s}$$

EJEMPLO. Dos barcos salen simultáneamente del mismo punto; uno viaja hacia el sur a una velocidad de 30km/h y el otro hacia el este a una velocidad de 40km/h. Después de 2h ¿Cuál es la velocidad de separación de los barcos?

Solución.



Se tiene que

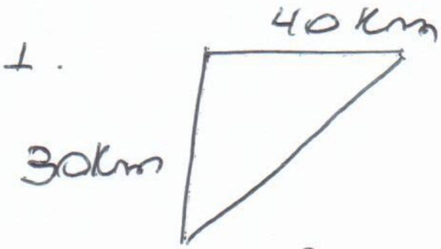
$$z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2.$$

$x(t)$: posición del barco que va hacia el este

$y(t)$: posición del barco que va hacia el sur

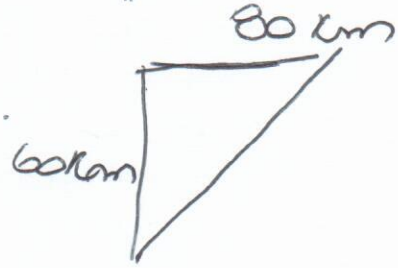
$z(t)$: distancia entre los barcos.

Por ejemplo, $t = 1$.



$z(1) = 50$ Km.

$t = 2$.



$z(2) = 100$ Km.

Nótese que

$$x(t) = v_B \cdot t = 40t \text{ km}$$

$$y(t) = v_A \cdot t = 30 \cdot t \text{ km}$$

$$\Rightarrow z(t)^2 = (40t[km])^2 + (30t[km])^2$$
$$= (1600 + 900) \cdot t^2 [km^2]$$

$$\Rightarrow z(t)^2 = 2500\, t\, [km^2]$$

$$\Rightarrow \quad Z(t) = \sqrt{2500t^2} \text{ Km}$$

$$= 50 \cdot t \text{ Km}$$

Ahora $\quad \dfrac{dZ}{dt} = 50 \ \dfrac{\text{Km}}{\text{h}}$

A cualquier instante t los barcos se separan a una velocidad de 50 Km/h.

Alternativamente. Usa $Z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)$ y deriva.