Clase 2 | 09/03/2016 | Horario Atención | ①

INFORMACIÓN: Talleres comienzan el Viernes 18 Marzo.

§ 1.3. Axiomas de orden.

Considere el conjunto $\mathbb{R}^+$ tal que verifica los axiomas de orden.

1. $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$. (Clausura para $+$)
2. $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}^+$. (Clausura para $\cdot$)
3. (Tricotomía) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ o $x = 0$.

Llamamos $\mathbb{R}^+$ como el conjunto de números reales positivos.

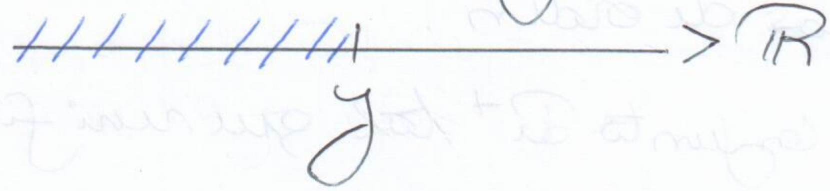
Def (Números reales negativos) Se define
$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Nótese que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

Def. Si $a, b \in \mathbb{R}$ se dice que

1. a es menor que b $(a < b)$ si y sólo si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
2. a es mayor que b $(a > b)$ si y sólo si $b < a$.
3. a es menor o igual a b $(a \leq b)$ si y sólo si $a < b$ y $a = b$.
4. a es mayor o igual a b $(a \geq b)$ si y sólo si $a > b$ y $a = b$.

Interpretación geométrica: $x<y$ si y sólo si x esta a la izquierda de y.



Propiedades

1. Se verifica que:

$$a<b, \qquad a=b, \qquad a>b$$

2. $a<b$ y $b<c \Rightarrow a<c$.
3. $a\leq b$ y $c\in\mathbb{R} \Rightarrow a+c\leq b+c$.
4. $a\leq b$ y $c\leq d \Rightarrow a+c\leq b+d$.
5. $a\leq b$ y $c\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow a\cdot c\leq b\cdot c$.
6. $a\leq b$ y $c\in\mathbb{R}^- \Rightarrow a\cdot c\geq b\cdot c$
7. $0\leq a\leq b$ y $0\leq c\leq d \Rightarrow 0\leq a\cdot c\leq b\cdot d$.
8. $a\neq 0 \Rightarrow a^2>0$.
9. $a>0 \Rightarrow a^{-1}>0$
10. $0<a<b \Rightarrow a^{-1}>b^{-1}$.

Demostración.

2. Si sabe que $b-a>0$ y $c-b>0$, entonces

$$\cancel{b}-a+c-\cancel{b}=c-a>0$$

$$\Rightarrow \boxed{a<c}$$

9. Supongamos que $a^{-1} < 0$. Entonces, dado que $a > 0$, propiedad 5 implica que

$$1 = a^{-1} \cdot a < 0,$$

lo cual es una contradicción! Entonces $a^{-1} > 0$.

Ejercicio

1. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Solución: Si $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}$. Entonces, propiedad 8 implica que

$$(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$\iff a^2 + b^2 \geq 2ab. \blacksquare$$

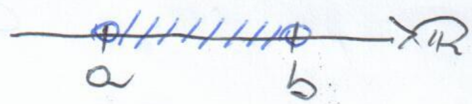
§1.3.1. Intervalos.

Resulta útil, para resolver inecuaciones, definir los siguientes conjuntos. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

1) Intervalo abierto:

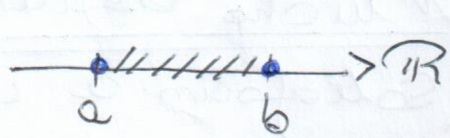
$$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

obs. Notación $]a, b[\iff (a, b)$.



2) Intervalo cerrado:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$



3) Intervalos Semi-abiertos

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

4) Intervalos infinitos

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.

$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

Def (Valores Extremos) Los números reales a, b y los símbolos $\infty, -\infty$ se llaman valores extremos. Si los valores extremos son reales entonces el intervalo es acotado.

§ 1.3.2. Inecuaciones Lineales.

Una inec. se dice inec. lineal (o de primer grado) si se puede reducir a la forma

$$ax + b > 0$$
$$(<, \geq, \leq).$$

<u>Nuestro objetivo</u>: Determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen a inec. dada.

EJERCICIO. Resuelva la inec.

$$\frac{6}{x-1} \geq 5.$$

Solución: Primero, $x \neq 1$.

Método 1. Si $x-1>0 \iff x>1$. Entonces

$$\frac{6}{x-1} \geq 5 \quad / \; x-1$$

$$\iff 6 \geq 5(x-1) \iff 6 \geq 5x-5$$

$$\iff 5x \leq 11$$

$$\iff x \leq \frac{11}{5}$$

$$S_1 = \left(-\infty, \frac{11}{5}\right] \cap (1,\infty) = \left(1, \frac{11}{5}\right]$$

Si $x<1$. Entonces,

$$\frac{6}{x-1} \geq 5 \quad / \; x-1 \implies 6 \leq 5(x-1)$$

$$\iff 5x \geq 11 \iff x \geq \frac{11}{5}$$

$$S_2 = \left(\frac{11}{5}, \infty\right) \cap (-\infty, 1) = \emptyset$$

Por lo tanto $S = S_1 \cup S_2 = \left(1, \frac{11}{5}\right)$.

Método 2. Nótese que

$$\frac{6}{x-1} \geq 5 \iff \frac{6}{x-1} - 5 \geq 0 \iff \frac{6-5(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{11-5x}{x-1} \geq 0.$$

"Puntos críticos": $x-1=0$ y $11-5x=0$

$\Rightarrow x=1$ y $x=\frac{11}{5}$

		1		$\frac{11}{5}$	
$11-5x$	$+$		$+$		$-$
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$\frac{11-5x}{x-1}$	$-$		$+$		$-$

$$\Rightarrow S = \left(1, \frac{11}{5}\right) \cup \left\{x = \frac{11}{5}\right\}$$

§ 1.3.3. Valor Absoluto.

Def (Valor Absoluto) Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define el valor absoluto de x como

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Propiedades (Valor absoluto) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $c \geq 0$. Entonces.

1. $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3. $|-x| = |x|$

4. $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$

5. $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

(Desigualdad triangular)

6. $|x| \geq c \iff x \geq c$ o $x \leq -c$.

Ejercicio. Demuestre que

$$|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c.$$

Solución.

($\Rightarrow$) Si $|x| \leq c \Rightarrow -|x| \geq -c$

Entonces,

$$-c \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq c$$

$$\Rightarrow -c \leq x \leq c.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $-c \leq x \leq c$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces Tricotomía implica que

$$x \geq 0 \quad \text{o} \quad x < 0.$$

Si $x \geq 0$: $|x| = x \leq c$

Si $x < 0$: $|x| = -x \leq c$

Conclusión: $|x| \leq c \; \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxtimes$

Ejercicio.

Demuestre que

$$|x| \geq c \iff x \leq -c \text{ o } x \geq c.$$

Solución.

($\Rightarrow$) Supongamos que $|x| \geq c$.

$$\Rightarrow -|x| \leq -c$$

Entonces,

1. $x \geq 0$: $x = |x| \geq c$
2. $x < 0$: $x = -|x| \leq -c$

$$\Rightarrow x \geq c \text{ o } x \leq -c.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $x \leq -c$ o $x \geq c$.
Entonces, si $x \leq -c$:

$$-x \geq c > 0 \Rightarrow |x| = -x \geq c$$

$$\Rightarrow |x| \geq c.$$

Si $x \geq c > 0$

$$|x| = x \geq c \Rightarrow |x| \geq c. \quad \boxtimes$$