

Claase 20 | 06/06/2016.

(1)

### §4.5. Derivados de ordem Superior.

Considere  $f(x) = \sin x$ .  $f$  é derivável. Em  
efeito,  $f'(x) = \cos x$ . Agora,

$$(f'(x))' = (\cos x)' = -\sin x$$

Note-se que derivamos  $f$  duas vezes.

Def. Seja  $f$   $m$  vezes derivável, então  $f^{(m)}(x)$  denota a  $m$ -ésima derivada de  $f$  em  $x$  (derivada de ordem  $m$ ).

Notação:

$f^{(1)}(x) = f'(x)$  - primeira derivada de  $f$  em  $x$ .

$f^{(2)}(x) = f''(x)$  - Segunda derivada de  $f$  em  $x$ .

⋮

Derivado de ordem Superior para  $m > 1$ :  $f^{(m)}(x)$ .

Nota:

1. Seja  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivável  $m$  vezes em  $(a, b)$ . Se dir-se que  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $f \in C^k(a, b)$ , se  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$  existem e são contínuos em  $(a, b)$ .

Se  $f^{(k)}$  existe e é contínuo  $\forall k \in \mathbb{N}$ , então  $f$  é de classe  $C^\infty$ ,  $f \in C^\infty(a, b)$ .

(2)

2. Notación: Derivadas de orden superior.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} (f(x)) \\ = D_x^n f.$$

Teorema. Sean  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones  $n$  veces diferenciables en  $(a, b)$ . Entonces  $f \cdot g$  es  $n$  veces dif. en  $(a, b)$ . Demos

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

EJEMPLOS.

1. Muestra que  $y(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$  satisface la ecuación  $y'' + y = 0$ .

Solución.

$$y(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x \\ \Rightarrow y'(x) = \alpha \cos x - \beta \sin x \\ \Rightarrow y''(x) = -\alpha \sin x - \beta \cos x$$

Entonces,

$$y'' + y = \cancel{-\alpha \sin x} - \cancel{\beta \cos x} + \cancel{\alpha \sin x} + \cancel{\beta \cos x} \\ = 0$$

2. Calcular  $\frac{d^n}{dx^n} (x \cos x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Solución.

$$\frac{d}{dx} (x \cos x) = \cos x - x \sin x$$



$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} (x \cos x) &= -\sin x - \sin x - x \cos x \\ &= -2 \sin x - x \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3} (x \cos x) &= -2 \cos x - \cos x + x \sin x \\ &= -3 \cos x + x \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4}{dx^4} (x \cos x) &= 3 \sin x + \sin x + x \cos x \\ &= 4 \sin x + x \cos x.\end{aligned}$$

de forma,

$$\frac{d^m}{dx^m} (x \cos x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} ((2n-1) \cos x - x \sin x), & m=2n-1 \\ (-1)^n (2n \sin x + x \cos x), & m=2n. \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}$

Probamos a formula por inducao.

Se  $n$  impar.

-  $n-1$ . Verificado!

- O somamos que

$$\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} (x \cos x) = (-1)^{n+1} ((2n-1) \cos x - x \sin x)$$

Probar  $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} (x \cos x) = (-1)^{n+2} ((2n+1) \cos x - x \sin x)$

Em afixao:

$$\begin{aligned}\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} (x \cos x) &= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} (x \cos x) \right) \\ &= \frac{d}{dx^2} \left( (-1)^{n+1} ((2n-1) \cos x - x \sin x) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1} \frac{d}{dx} \left( -(2k-1) \sin x - \sin x - x \cos x \right) \\
&= (-1)^{k+1} \frac{d}{dx} \left( -2k \sin x - x \cos x \right) \\
&= (-1)^{k+2} \frac{d}{dx} \left( 2k \sin x + x \cos x \right) \\
&= (-1)^{k+2} (2k \cos x + \cos x - x \sin x) \\
&= (-1)^{k+2} ((2k+1) \cos x - x \sin x)
\end{aligned}$$

Como m por: Ejercicio.  $\square$

§5 Derivadas implícitas y primitivos.

La gráfica de  $f$  continua se puede considerar como una curva en el plano:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = f(x) \text{ — curva en el plano}$$

Esta curva tiene una recta tangente en aquellos puntos donde  $f$  es diferenciable.

Considero ahora,

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y).$$

$F(x, y) = 0$  considerando a una ec. de 2 variables. La variable  $y$  está relacionada mediante  $F$  a la variable  $x$ . Se dice que  $y$  está definida implícitamente.



## EJEMPLOS.

⑤

1. Consider  $3x - 2y = 4$ . Se puede escribir como

$$F(x, y) = 0,$$

donde  $F(x, y) = 3x - 2y - 4$ . En esta oc. se puede despejar la variable  $y$

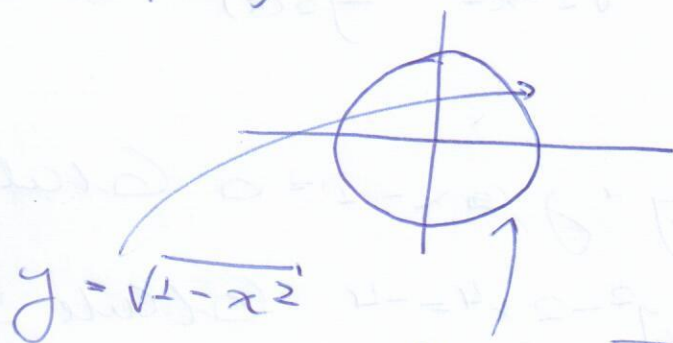
$$y = f(x) = \frac{3}{2}x - 2.$$

2. Consider  $e^x + x = \sin(y-3) + 2y + 6$ . Escríbase en la forma  $F(x, y) = 0$ :

$$e^x + x - \sin(y-3) - 2y - 6 = 0.$$

¿Es posible despejar y en términos de  $x$ ?

3. Consider  $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ . Lo i.e.  $F(x, y) = 0$  es una circunf. de radio 1 <sup>centro en el origen</sup>



Esto no es una gráfica. Sin embargo se puede definir y obtener local

ambas funciones se derivan en  $(-1, 1)$ .

§ 5.1.1 Derivación implícita.

Consider  $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Supongamos que uno de  $(x_0, y_0)$  se puede escribir  $y = \varphi(x)$ . Entonces

$$F(x, \varphi(x)) = x^2 + (\varphi(x))^2 - 1 = 0.$$

Derivamos respecto de  $x$ :

$$2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-2x}{2\varphi(x)} = \frac{-x}{\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \quad \forall y \neq 0.$$

$$\text{Notase que } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \\ f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{df_1}{dx}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{f_1(x)}$$

$$\frac{df_2}{dx}(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{f_2(x)}$$

EJEMPLOS.

1. Consider  $x \cos y + y \cos x - 1 = 0$  Calcule  $\frac{dy}{dx}$

2. Consider  $y^5 + 3y^2 - 2x^4 = -4$ . Calcule  $\frac{dy}{dx}$ .

3. Consider  $(x^2 + y^2)^2 = 2x^2y$ . Calcule  $\frac{dy}{dx}$ .