Clase 3 | 14/03/2016.

§ 1.3.3. Valor Absoluto.

Def (Valor Absoluto) Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define el valor absoluto de $\mathbb{R}$ como

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Propiedades (Valor Absoluto) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $c \geq 0$. Entonces,

1. $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $|-x| = |x|$.
4. $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$.
5. $\big||x| - |y|\big| \leq \underbrace{|x+y| \leq |x| + |y|}_{\text{Desigualdad triangular.}}$
6. $|x| \geq c \Leftrightarrow x \geq c$ o $x \leq -c$.

Ejercicio. Demuestre que

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c.$$

Solución:

($\Rightarrow$) Supongamos que $|x| \leq c$. Entonces

$$-|x| \geq -c.$$

Además,

$$-c \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq c$$

En conclusión,

$$-c \leq x \leq c$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $-c \leq x \leq c$.

Como $x \in \mathbb{R}$, la propiedad de Tricotomía nos dice que

$$x > 0 \quad , \quad x < 0 \quad o \quad x = 0.$$

Si $x \geq 0$. Entonces $|x| = x \leq c$.

Si $x < 0$. Entonces $|x| = -x \leq c$.

En conclusión: $|x| \leq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$. ▨

§1.3.4. Inecuaciones con Valor Absoluto.

EJERCICIOS.

1. Resolver $\dfrac{1}{|x+7|} > 2$.

Solución. Primero, $x \neq -7$.

Segundo, por definición, $|x+7| > 0$. Entonces,

$$\frac{1}{|x+7|} > 2 \iff 1 > 2|x+7|$$

$$\iff |x+7| < \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, propiedad 4 implica que

$$-\frac{1}{2} < x+7 < \frac{1}{2} \iff -\frac{15}{2} < x < -\frac{13}{2}$$

$$S = \left]-15/2, -13/2\right[\setminus \{-7\}.$$

2. Resolver $|x-|x-1|| \leq 2$.

Solución. Ocupar propiedad 4 para deducir que

$$|x-|x-1|| \leq 2 \iff -2 \leq x-|x-1| \leq 2$$

$$\iff -2-x \leq -|x-1| \leq 2-x$$

$$\iff x-2 \leq |x-1| \leq x+2$$

Separar entre dos casos:

- Si $x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1$. Entonces, tenemos que

$$x-2 \leq x-1 \leq x+2 \iff -2 \leq -1 \leq 2,$$

lo cual es verdadero para todo $x \geq 1$. Entonces

$$S_1 = [1, \infty)$$

- Si $x < 1 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$. Entonces, tenemos que

$$x-2 \leq -(x-1) \leq x+2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x-2 \leq -x+1 \quad y \quad -x+1 \leq x+2.$$

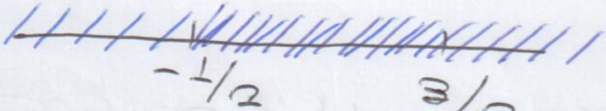
- $x-2 \leq -x+1 \Longleftrightarrow 2x \leq 3$

$$\Rightarrow \quad x \leq 3/2$$

- $-x+1 \leq x+2 \Rightarrow -2x \leq 1$

$$\Rightarrow \quad x \geq -1/2$$

Entonces,



$$S_2 = [-1/2, 3/2] \cap (-\infty, 1[$$
$$= [-1/2, 1)$$

Finalmente,

$$S = S_1 \cup S_2$$
$$= [1, \infty) \cup [-1/2, 1)$$
$$= [-1/2, \infty) \quad \blacksquare$$

§ 1.3.5. Inecuaciones Cuadráticas.

Una inecuación cuadrática o de segundo orden es una expresión algebraica que se puede reducir a

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$(<, \geq, \leq)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Objetivo. Resolver inec. cuadráticas, es decir, encontrar todos los valores de x que verifican la inec. dada.

<u>Ec. cuadrática asociada</u>: $ax^2+bx+c=0$.

Soluciones?

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Aplicar $\sqrt{\ }$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Así obtenemos las raíces o soluciones de la ec. cuadrática $ax^2+bx+c=0$.

Notación: x_1 y x_2.

Def. (Discriminante). Se define el discriminante de la ec. cuadrática como

$$\Delta = b^2-4ac.$$

Se tienen los siguientes casos.

1) $\Delta > 0$, entonces ec. tiene dos raíces reales distintas: $x_1 \neq x_2$

2) $\Delta = 0$, entonces ec. tiene raíces reales iguales: $x_1 = x_2$.

3) $\Delta < 0$, entonces ec. no tiene raíces reales. (raíces complejas conjugadas).

Interpretación Geométrica. La ec. cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

corresponde a una parábola y

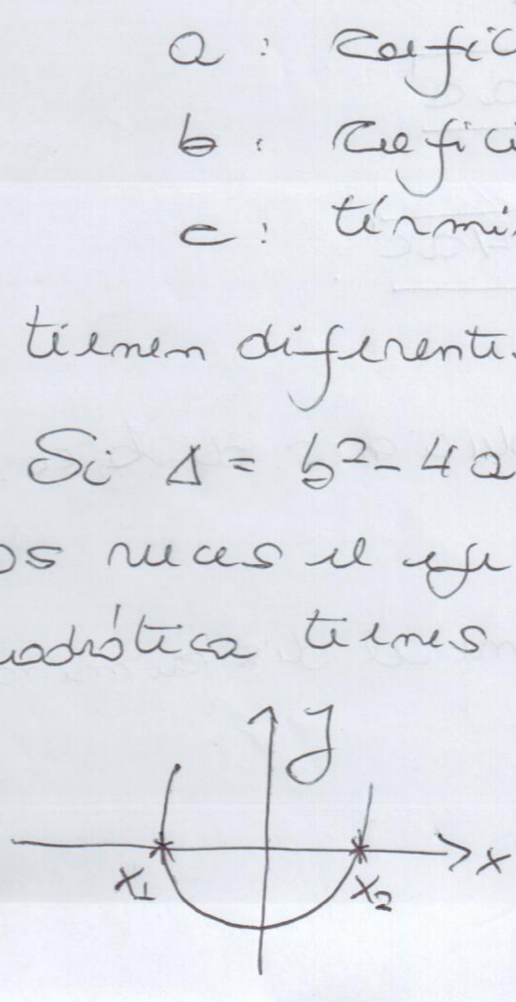
a : coeficiente cuadrático.

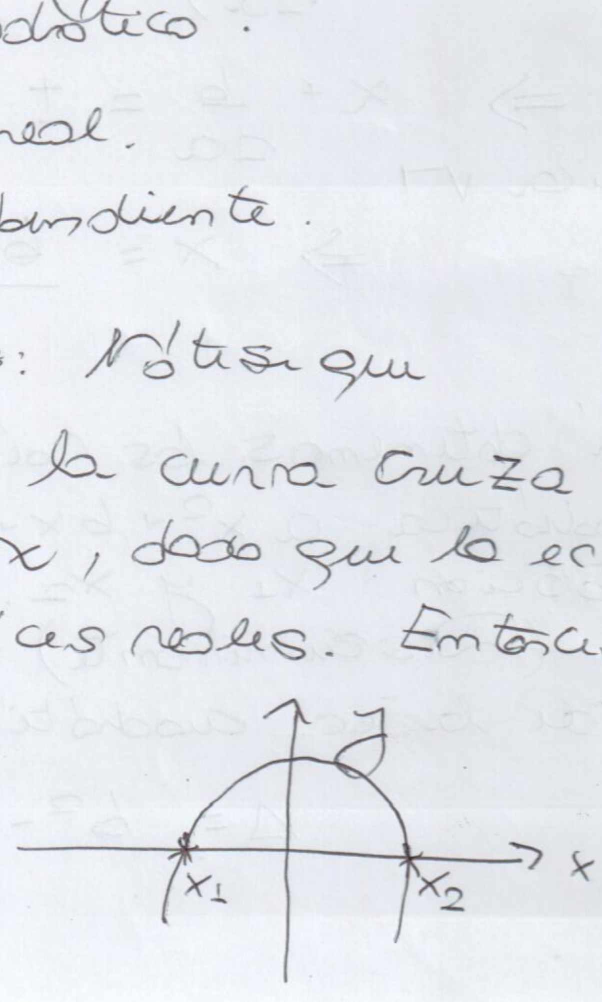
b : coeficiente lineal.

c : término independiente.

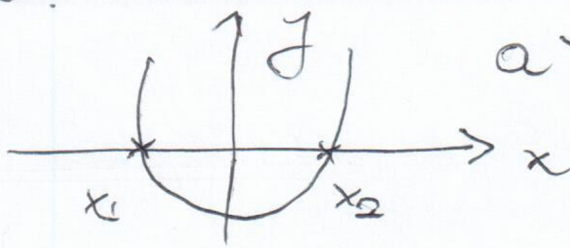
Se tienen diferentes casos: Nótese que

1) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la curva cruza dos veces el eje de los x, dado que la ec. cuadrática tiene dos raíces reales. Entonces



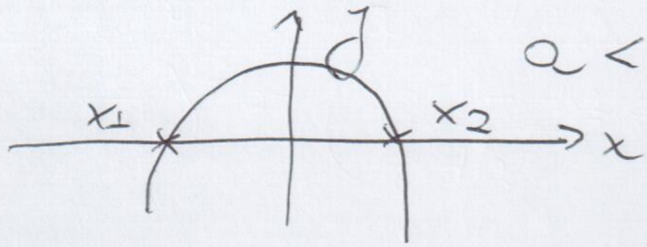


1.1) Si $a > 0$, entonces la curva se abre hacia arriba. Geométricamente se tiene que



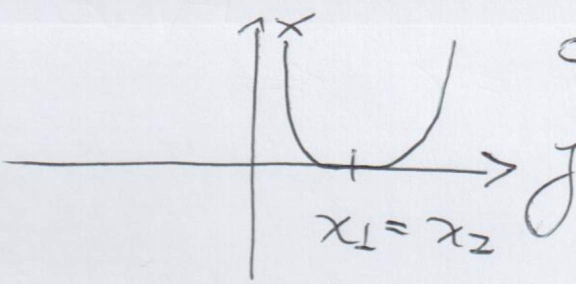
$a > 0$; $\Delta > 0$

1.2) Si $a < 0$, entonces la curva se abre hacia abajo. Geométricamente se tiene que

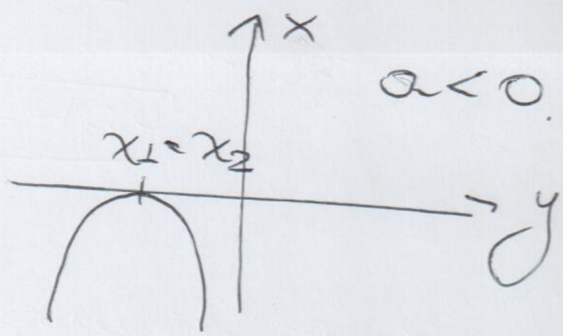


$a < 0$; $\Delta > 0$

2) $\Delta = 0$, la curva toca una vez el eje de las x. La ec. cuadrática tiene una única raíz real. Geométricamente

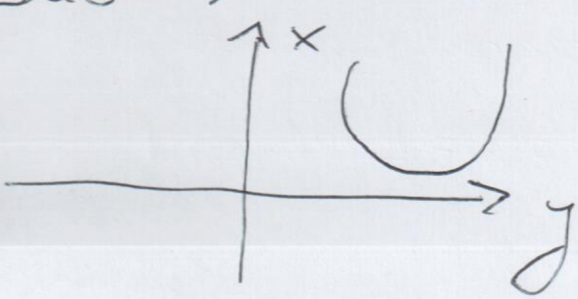


$a > 0$

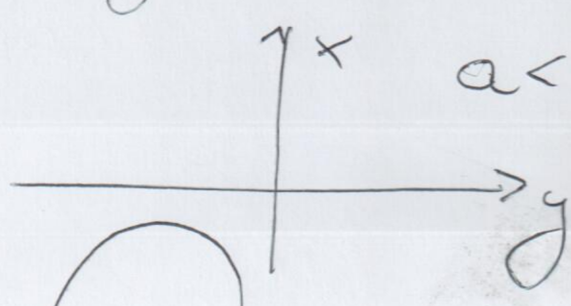


$a < 0$.

3) $\Delta < 0$. La ec. cuadrática no tiene raíces reales $\Rightarrow$ curva NO cruza el eje de los x.



$a > 0$



$a < 0$.