Clase 4 | 16/03/16.

De la clase pasada.

- Valor Absoluto.

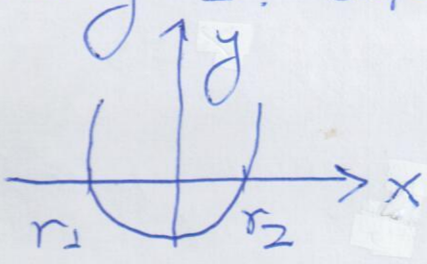
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0. \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

- Inec. con valor absoluto.
- Ec. cuadrática $ax^2+bx+c=0$; discriminante
$$\Delta = b^2-4ac.$$
- Raíces ec. cuadrática y relación con Δ.

Hoy. Supongamos que se quiere resolver
$$ax^2+bx+c>0, \quad a>0$$

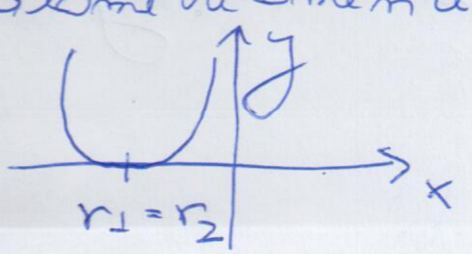
Hay 3 posibilidades.

1) $\Delta>0$, entonces tenemos dos raíces reales r_1 y r_2. Supongamos que $r_1<r_2$. Geométricamente



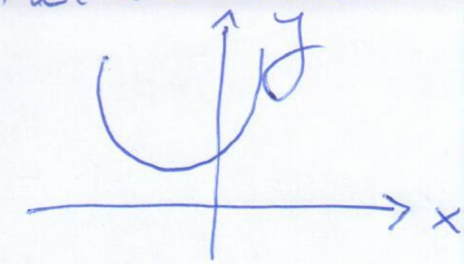
Entonces
$$S =]-\infty, r_1[\cup]r_2, \infty[$$

2) $\Delta=0$, entonces se tiene una raíz real $r_1=r_2$. Geométricamente. Entonces



$$S = \mathbb{R} \setminus \{r_1\} =]-\infty, r_1[\cup]r_1, \infty[.$$

3) $\Delta < 0$. Entonces no existen soluciones o raíces reales. Geométricamente



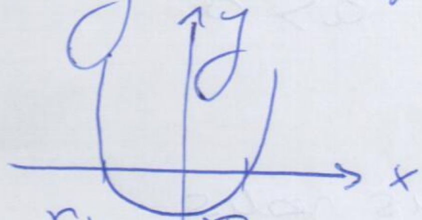
Entonces $S = \mathbb{R}$.

Supongamos que se quiere resolver

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a > 0.$$

Hay 3 posibilidades.

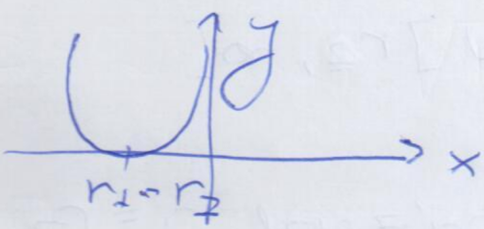
1) $\Delta < 0$. Entonces existen dos raíces reales r_1 y r_2. Supongamos que $r_1 < r_2$. Geométricamente



Entonces,

$$S =]r_1, r_2[.$$

2) $\Delta = 0$. Entonces existe una raíz real $r_1 = r_2$. Geométricamente



Entonces

$$S = \emptyset$$

3) $\Delta < 0$. Entonces no existen raíces reales y claramente se tiene que

$$S = \emptyset.$$

EJERCICIOS.

1. Resolver la inec.

$$-2+|x+2| \leq \sqrt{1-|x-3|}$$

Solución. Primero, la raíz cuadrada debe estar bien definida. Entonces,

$$1-|x-3| \geq 0$$

$$\iff |x-3| \leq 1$$

$$\iff -1 \leq x-3 \leq 1$$

$$\iff 2 \leq x \leq 4$$

Por lo tanto, se debe resolver la inec. considerando que x debe pertenecer a $[2,4]$.

Como $x \in [2,4]$, entonces $x+2>0$. Luego, la inec. es equivalente a

$$-\cancel{2}+x+\cancel{2} \leq \sqrt{1-|x-3|} \quad / \ (\ )^2$$

$$x^2 \leq 1-|x-3|$$

Nótese que ambas exp. ≥ 0.

Nótese que $x-3$ cambia de signo cuando $x=3$. Entonces, consideramos dos casos:

1) $x \in [2,3]$: $\quad x^2 \leq 1+(x-3)$

$$\iff x^2-x+2 \leq 0.$$

Calculamos $\Delta = b^2-4ac = 1-4\cdot 1\cdot 2 < 0$.

Además, $a<0$. Entonces, cuadrática no tiene raíces reales. En conclusión

$$S_1 = \emptyset.$$

2) $x \in [3,4]$: $\quad x^2 \leq 1-(x-3)$

$$\iff x^2+x-4 \leq 0.$$

Calculamos $\Delta = b^2-4ac = 1-4.1(-4) > 0$.
Cuadrática tiene dos raíces reales

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Además, $a>0$. Entonces $x^2+x-4 \leq 0$

$$\iff x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$$

Entonces,
$$S_2 = [3,4] \cap \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right] = \emptyset$$

Conclusión: $S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

2. Resolver. $\sqrt{|x|-2} \leq |x+2|$.

Solución. Primero, $\sqrt{\ }$ debe estar bien definida.
Restricción: $|x|-2 \geq 0 \iff |x| \geq 2$

$$\iff x \geq 2 \text{ o } x \leq -2.$$

Si $x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[2, \infty\right[$, entonces

$$\sqrt{|x|-2} \le |x+2| \quad /(\ )^2$$

$$\Rightarrow \quad |x|-2 \le (x+2)^2$$

Nótese que ambos expresiones son ≥ 0.

Separamos dos casos:

1) $x \le 2$: $\quad -x-2 \le x^2+4x+4$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2+5x+6 \geq 0.$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x+3)(x+2) \geq 0.$$

$$S_1 = \left]-\infty, -2\right] \cap \left(\left]-\infty, -3\right] \cup \left[-2, \infty\right[\right)$$

$$= \left]-\infty, -3\right] \cup \{-2\}.$$

2) $x \geq 2$: $\quad x-2 \le (x+2)^2$

$$\Longleftrightarrow \quad x-2 \le x^2+4x+4$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2+3x+6 \geq 0.$$

Calculamos $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 6 < 0$.

No hay soluciones reales y $a > 0$. Entonces

$$S_2 = \mathbb{R} \cap \left[2, \infty\right[= \left[2, \infty\right[$$

Finalmente,

$$S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, -3\right] \cup \{-2\} \cup \left[2, \infty\right[.$$

§ 1.4. Axioma del Supremo.

Definición (cotas inferiores y superiores). Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que

1. a es una cota inferior de A si y sólo si $\forall x \in A: \ x \geq a$.

   Si existe una cota inferior, A se llama acotado inferiormente.

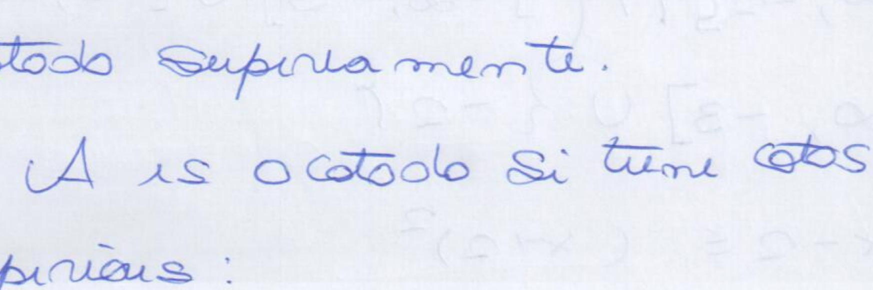
2. a es una cota superior de A si y sólo si $\forall x \in A: \ x \leq b$.

   Si existe una cota superior, A se dice acotado superiormente.

3. A es acotado si tiene cotas inferiores y superiores:

   $A \subset \mathbb{R}$ es acotado $\iff \exists a, b \in \mathbb{R}: \forall x \in A$
   $$a \leq x \leq b.$$

Nota. Si A tiene una cota inferior, entonces tiene infinitas cotas inferiores.



Análogamente para cotas superiores.