§ 1.4. Axioma del Supremo.

Definición (cotas inferiores y superiores) Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que

1. a es ~~una~~ cota inferior de A si y sólo si $\forall x \in A: \ x \geq a$.

   Si existe una cota inferior, A se llama acotado inferiormente.

2. a es una cota superior de A si y sólo si $\forall x \in A: \ x \leq b$.

   Si existe una cota superior, A se llama acotado superiormente.

3. A es acotado si tiene cotas inferiores y superiores

   $A \subset \mathbb{R}$ es acotado $\Longleftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}: \forall x \in A$
   $$a \leq x \leq b.$$

Nota:

$A = (a, \infty)$

a es una cota inferior para A

A tiene infinitos cotas inferiores!

Lo mismo vale para cotas superiores.

Esto da origen a la siguiente definición.

Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}$

1. $a \in \mathbb{R}$ se dice ínfimo para A si es el mayor de las cotas inferiores.

Notación: $a = \inf(A) \iff \forall x \in A: x \geq a$ y $a \geq a'$ para toda cota inferior a' de A.

Si $\inf(A) \in A$ entonces se dice mínimo y se escribe $a = \min(A)$.

2. $b \in \mathbb{R}$ se dice supremo para A si es el menor de las cotas superiores de A.

Notación: $b = \sup(A) \iff \forall x \in A: x \leq b$ y $b \leq b'$ para toda cota superior b' de A.

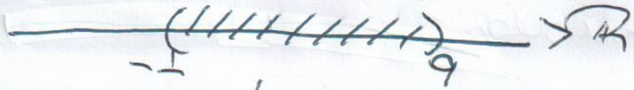
Si $\sup(A) \in A$ entonces se dice máximo y se escribe $b = \max(A)$.

EJEMPLOS. Encuentre cotas inferiores, superiores, ínfimo, supremo, máximo y mínimo, si es que existen, para

1) $A =]-1, 9[$

2) $B = [-1, 9]$

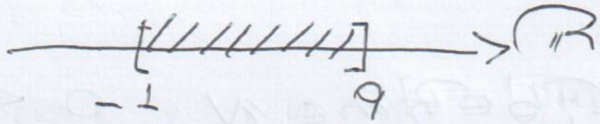
Solución.



1) - Cotas superiores: todos $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \geq 9$

- Cotas inferiores: todos $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq -1$.
- A es acotado.
- $\inf(A) = -1$; $\sup(A) = 9$
- A no tiene máximo ni mínimo

2)



- Cotas inferiores: todos $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq -1$
- Cotas superiores: todos $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \geq 9$
- B es acotado
- $\inf(B) = -1$; $\sup(B) = 9$
- $\max(B) = 9$, $\min(B) = -1$.

Axioma del supremo o de completitud de $\mathbb{R}$

Todo subconjunto $\neq \emptyset$ acotado superiormente tiene supremo.

Entonces.

Teorema. Todo subconjunto $\neq \emptyset$ acotado inferiormente tiene ínfimo.

Propiedad Arquimideana:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{N} :\ x < m.$$

Demostración. Argumento por contradicción

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall m \in \mathbb{N} :\ m \leq x$$

esto significa que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, lo cual es falso.

Corolario: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \exists m \in \mathbb{N} :\ 0 < \frac{1}{m} < x$

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}^+$ y defina $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$
Usar propiedad Arquimideana para concluir: dado que $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\exists m \in \mathbb{N} :\ y = \frac{1}{x} < m$$

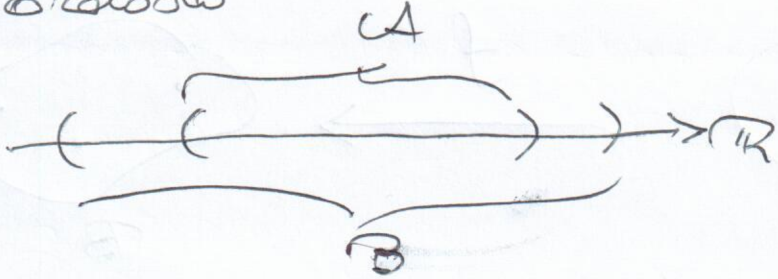
luego se tiene que

$$\exists m \in \mathbb{N} :\ 0 < \frac{1}{m} < x$$

Teorema: Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} :\ a < \frac{p}{q} < b.$$

Proposición: Si $A \subseteq B$ son conjuntos no vacíos y B es acotado



$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Ejercicio. Sea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \left(\frac{1}{2}\right) + (-1)^n, \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

a) Determine si A es acotado

b) Determine si existe $\sup(A)$ e $\inf(A)$

¿Existen máximo y mínimo de A?

Solución: Nótese que $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ es par} \\ -1, & n \text{ es impar} \end{cases}$

Por lo tanto se tiene que

$$A = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\} \subset \mathbb{R}$$

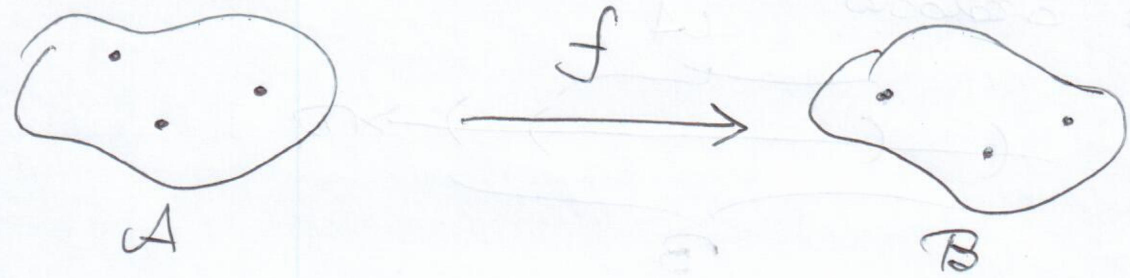
- Cotas superiores: todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \geq \frac{3}{2}$
- Cotas inferiores: todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq -\frac{1}{2}$
- $\sup(A) = 3/2$, $\inf(A) = -1/2$.
- $\max(A) = 3/2$, $\min(A) = -1/2$.

Entonces,

A es acotado y

$\max(A) = 3/2$ y $\min(A) = -1/2$.

§ 2. Funciones.



Una función f de A en B es una regla que a cada elemento $a \in A$ asocia un único elemento $x \in B$.

Si $a \in A$, el único elemento que se le asoció, por intermedio de f, se denota

$$f(a).$$

y se llama imagen o valor de f en a.

El conjunto de todas las imágenes se conoce como:

- Imagen de f.
- Recorrido de f.
- Codominio de f.

Matemáticamente

$$\operatorname{Rec}(f) = \{ f(x) \in B : x \in A \}.$$

A se conoce como el dominio de f.

Notación: $f : A \longrightarrow B$

$$x \longmapsto f(x)$$

EJEMPLOS: 1) Considere la relación

$$f: \{1,2\} \to \{0,1\}$$

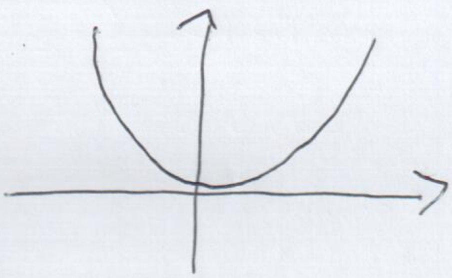
$$f(1)=1 \quad ; \quad f(1)=0$$

$$f(2)=0.$$

f no es una función dado que la regla f asocia dos valores a 1.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ f corresponde a una función.

$$x \longmapsto f(x)=x^2$$



$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$$

$$\mathrm{Rec}(f)=\mathbb{R}^+$$

§ 2.2. Funciones reales.

Funciones de una variable real son el principal foco de este curso:

$$f: A \longrightarrow B,$$

donde $A, B \subset \mathbb{R}$.

Nota: El dominio de f es A, donde A es el conjunto más grande en $\mathbb{R}$ donde la expresión que define la función tiene sentido.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

EJEMPLO:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

Encuentre el dominio de f.

Solución: $Dom(f) = \mathbb{R}^+$.