Clase 8 | 30/03/2016. 

La clase de hoy está dedicada a la composición de funciones.

Definición (o composición). Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ y sean

$$g: A \to B$$
$$f: B \to C$$

funciones reales. Se define la composición de $f$ con $g$ como la función $f \circ g$ dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Nota. La composición de funciones se puede definir de manera más general. Sean $f, g$ tales que

$$f: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Se define $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ bajo la condición que $\operatorname{Rec}(g) \subseteq \operatorname{Dom}(f)$. Esta condición puede restringir el $\operatorname{Dom}(g)$.

EJEMPLOS.

1. Considere $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2$. Calcule $f \circ g$ y $g \circ f$

Solución. Nótese que $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} = \operatorname{Dom}(g)$.

Además, $Rec(f)=\mathbb{R}$ y $Rec(g)=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ (2)

Entonces, se tiene que

- $Rec(g)=\mathbb{R}^+\cup\{0\} \subset Dom(f)=\mathbb{R}$ por lo tanto se puede definir $f\circ g$. En efecto,

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2.$$

- $Rec(f)=\mathbb{R} \subseteq Dom(g)=\mathbb{R}$. Entonces se puede definir $g\circ f$. En efecto

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x)$$
$$= (2x)^2 = 4x^2.$$

Este ejemplo tiene la siguiente consecuencia importante: en general y pese a que $f\circ g$ y $g\circ f$ están bien definidas

$$f\circ g \neq g\circ f.$$

2. Considere las funciones

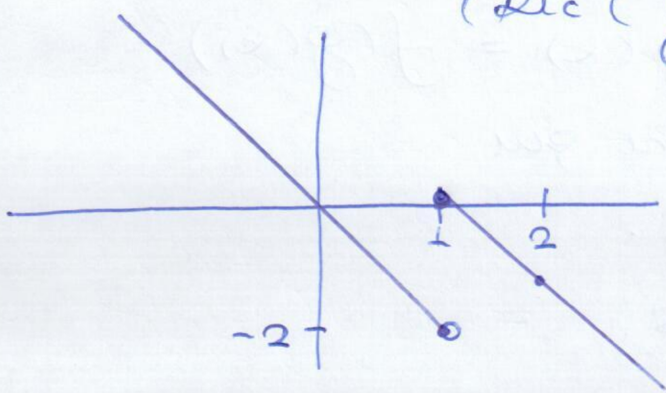
$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x\le 0. \\ x, & x>0. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x, & x<1. \\ 1-x, & x\geq 1. \end{cases}$$

Encuentre, si es posible, $f \circ g$ y $g \circ f$. ③

Solución. Encontramos $(f \circ g)(x)$.

Nótese que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\text{Rec}(g) = \mathbb{R}$



Entonces se puede definir $(f \circ g)$ dado que $\text{Rec}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$.

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(g(x))$$

Caso 1. Supongamos que $x < 1$.

Entonces $g(x) = -2x$.

Necesitamos encontrar $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

• Nótese que $-2x \leq 0$ si $x \geq 0$. Pero, además $x < 1$, entonces si $x \in [0, 1[$ se concluye que

$$-2x \leq 0.$$

En este caso,

$$\Rightarrow f(-2x) = 1 - (-2x)^2 = 1 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) = 1 - 4x^2 \quad \text{si } x \in [0, 1[$$

• Nótese que $-2x > 0$ si $x < 0$. Además, estamos en el caso que $x < 1$. Por lo tanto $x < 0$ está ok.

Entonces

$$f(-2x) \underset{\substack{\uparrow \\ x<0}}{=} -2x \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

Em consecuencia

$$(f \circ g)(x) = f(-2x) = -2x \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$

Caso 2. Supongamos que $x \geq 1$.

Queremos encontrar $f \circ g(x) = f(g(x))$

Primero, si $x \geq 1$ se tiene que

$$g(x) = 1 - x.$$

Ahora tenemos dos subcasos.

1) $1 - x > 0 \iff x < 1$

2) $1 - x \leq 0 \iff x \geq 1$.

Nótese que el caso 2.1 no puede ocurrir.

Ahora, si $x \geq 1$ entonces $1 - x \leq 0$. Esto implica que

$$f(g(x)) \underset{x \geq 1}{\underset{\uparrow}{=}} f(1-x) = 1 - (1-x)^2$$
$$= 1 - (1 - 2x + x^2)$$
$$= 2x - x^2.$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 2x - x^2 \text{ si } x \geq 1.$$

Em conclusión.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2x, & -\infty < x < 0. \\ 1 - 4x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Encontramos $(g \circ f)(x)$.

Nótese que $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Rec}(f) \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathrm{Rec}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$

Entonces se puede definir $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$f$ está definida por tramos. Punto crítico $x = 0$.

Por lo tanto consideramos dos casos:

Caso 1. $x \leq 0$.

Si $x \leq 0$, entonces $f(x) = 1 - x^2$.

Nótese que $g$ también está definida en tramos.

Punto crítico $x = 1$.

Caso 1.1. $1 - x^2 < 1 \Leftrightarrow -x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$.

Caso 1.2. $1 - x^2 \geq 1 \Rightarrow -x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 0$.

Note que caso 1.2 sólo ocurre cuando $x = 0$.

Caso 1.1 ocurre $\forall x \in \mathbb{R}$. Pero $x \leq 0$, entonces

$\forall x \leq 0$. En este caso

$$g(f(x)) \underset{x \leq 0}{=} g(1 - x^2) = -2(1 - x^2)$$

$$= -2 + 2x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

$g(f(0)) = g(1) = 0$.

Caso 2: $x > 0$.

Si $x > 0$, entonces $f(x) = x$.

Dado $g$ está definido por tramos, con punto crítico $x = 1$, se consideran dos casos.

2.1. $x < 1$

2.2. $x \geq 1$.

Caso 2.2 $x \geq 1$ y $x > 0 \Rightarrow x \in [1, \infty)$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = 1 - x$

Caso 2.1. $x < 1$ y $x > 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$

Si $x \in (0,1)$, entonces

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = -2x$.

Resumen

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -2 + 2x^2, & -\infty < x < 0 \\ -2x & ; 0 < x < 1 \\ 1 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$g \circ f$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$. ¿Por qué?

$Rec(f) \neq \mathbb{R}$.