

§ 2.3 Funciones Inyectivas.

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$

Definición (inyectividad). f es inyectiva o uno a uno (1-1) si y sólo si

$$\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

EJEMPLOS. 1) Considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x + 6$.

Es f inyectiva?

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow 5x_1 + 6 = 5x_2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Entonces, la función f es inyectiva.

2) Considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^2 + 5$.

Es f inyectiva?

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 5 = 2x_2^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$$

Entonces $x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$.

$\Rightarrow f$ no es inyectiva.

En efecto, $f(1) = 7 = f(-1)$ y $1 \neq -1$.

Definición. (Sobreyectividad) Sea $f: A \rightarrow B$, donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que f es sobreyectiva o epyectiva

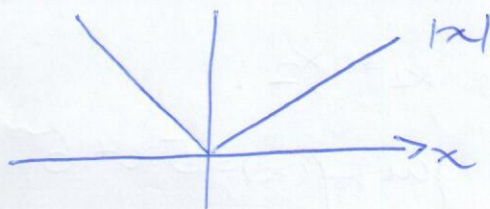
Si y sólo si

$$\text{Ran}(f) = B \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x).$$

(2)

EJEMPLOS. Considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$.

Debemos encontrar el $\text{Ran}(f)$. Gráficamente



Entonces, $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

$\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no es sobreyectiva.

Notase que podemos redefinir f .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$x \mapsto |x|$$

y ahora, se tiene que f es sobreyectiva.

Definición (biyectividad). Sea $f: A \rightarrow B$ donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que f es biyectiva si y sólo si

f es inyectiva y sobreyectiva.

EJERCICIO. Dadas $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentra $\text{Dom}(f)$, $\text{Ran}(f)$ y gráfica de f . En cada caso estudia, inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

$$f(x) = \begin{cases} x|x| + a, & x < 0, \\ x + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

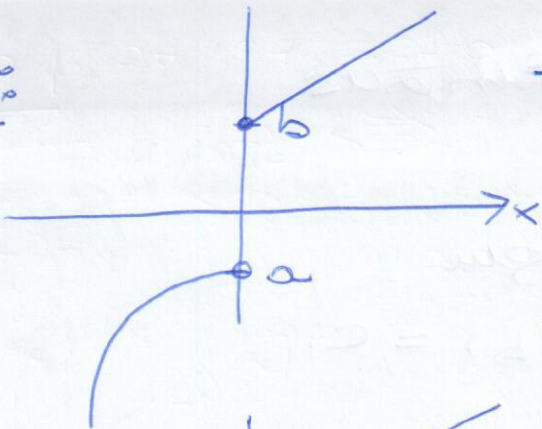
Solución: Notase que, si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ y

entonces

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a, & x < 0, \\ x + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

f depende de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Estudiemos 3 casos: $a < b$; $a = b$; $a > b$.

$$\underline{a < b:}$$



$$- \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$- \text{Rec}(f) =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$$

- f is injectiva.

- f no es sobreyectiva.

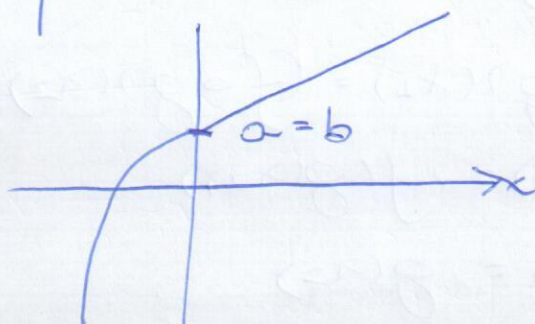
$$- \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$- \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$$

- f is injectiva

- f is sobreyectiva

$$\underline{a = b:}$$



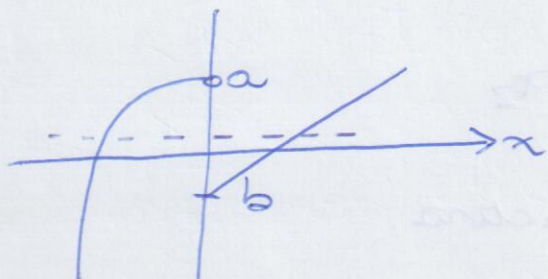
$$- \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$- \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$$

- f no ^{es} injectiva

- f is sobreyectiva

$$\underline{a > b:}$$



$$- \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$- \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$$

- f no ^{es} injectiva

- f is sobreyectiva

Propiedades. Sean $g: A \rightarrow B$ y $f: B \rightarrow C$. Entonces:

1. Si g y f son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.

2. Si g y f son injectivas, entonces $f \circ g$ es injectiva.

3. Si g y f son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.

Demostración.

1. Si quisiéramos probar que $f \circ g: B \rightarrow C$ es sobreyectiva:

$$\forall c \in C, \exists a \in A : (f \circ g)(a) = c$$

Sea $c \in C$, f es sobreyectiva, entonces $\exists b \in B$:
 $c = f(b)$

Otro, g es sobreyectiva, entonces

$$\exists a \in A: g(a) = b.$$

En conclusión, $\exists a \in A$ tal que

$$f(g(a)) = f(b) = c.$$

2. Si $x_1, x_2 \in A: (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$

$$\Leftrightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$\Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

f es inyectiva

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

g es inyectiva

Conclusión, $f \circ g$ es inyectiva.

3. De 1 y 2 se deduce que f es biyectiva.

Definición (invertibilidad) Sea $f: A \rightarrow B, A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Se dice que f es invertible si y sólo si

$$\exists f^{-1}: B \rightarrow A: f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}.$$

Nota. $\forall a \in A \forall b \in B: f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b).$

Teorema. f es invertible $\Leftrightarrow f$ es biyectiva.

Demostación. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es invertible. Entonces,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$$

$\Rightarrow f$ es inyectiva.

f invertible $\Rightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(f^{-1}) = B$
 $\Rightarrow f$ es sobreyectiva.

($\Leftarrow$) Ejercicio.

Problemas. Sea $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ funciones biyectivas, entonces

1. f^{-1} es biyectiva.

2. $(f^{-1})^{-1} = f$.

3. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Demostración. 1 y 2 ejercicio.

$$\begin{aligned} 3. (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ \text{id} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id} \end{aligned}$$

De la misma forma $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}$
 $\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ejercicio. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{(2x-1)^2 - 4}$
 Determine $\text{Dom}(f)$ y $\text{Ran}(f)$. Es inyectiva? Sobreyectiva?
 Se puede restringir f para que sea biyectiva?

Solución.

a) $\text{Dom}(f)$: Se necesita que

$$(2x-1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 4 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3/4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3/2)(x + 1/2) \geq 0.$$

Entonces, $\text{Dom}(f) =]-\infty, -1/2[\cup]3/2, \infty[$.

b) $\text{Ran}(f)$. Buscamos todos los $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ con $x \in \text{Dom}(f)$. Entonces

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{(2x-1)^2 - 4} \quad ; \quad y \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2 = (2x-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y^2 + 4 = (2x-1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 4} = |2x-1|$$

No hay restricciones en y . $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

c) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = f(b)$.

$$\Rightarrow \sqrt{(2a-1)^2 - 4} = \sqrt{(2b-1)^2 - 4}$$

$$\Rightarrow (2a-1)^2 - 4 = (2b-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow (2a-1)^2 = (2b-1)^2 \Rightarrow |2a-1| = |2b-1|$$

$$\Rightarrow 2a-1 = 2b-1 \quad \text{o} \quad 2a-1 = -(2b-1)$$

$$\Rightarrow a = b \quad \text{o} \quad a = -b + 1.$$

Entonces f no es inyectiva.

Notasi que $f(-1/2) = 0 = f(3/2)$.

d) - f no es inyectiva. f no es ~~sur~~yectiva.

- $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es ~~sur~~yectiva pero no inyectiva

- Restringir $\text{Dom}(f)$.

$f: [3/2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ es biyectiva.

¿Cuál es su inversa?