Clase 10 | 06/09/2016.

De la clase pasada:

Vectores en $\mathbb{R}^n$: $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_i \in \mathbb{R}$
$i = 1, \ldots, n$.

Operaciones con vectores: 1) $+$: $\vec{v} + \vec{w}$
2) $\cdot$: $\alpha \vec{v}$

Producto punto:
$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Prop. 1) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = 0$
2) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$.
3) $\langle \alpha \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Norma de un vector: $\| \vec{x} \| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2}.$$

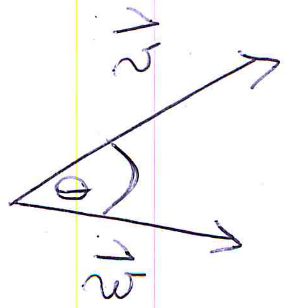
Distancia entre vectores: $d(\vec{v}, \vec{w}) = \| \vec{v} - \vec{w} \|$

Prop. $\| \vec{v} + \vec{w} \| \leq \| \vec{v} \| + \| \vec{w} \|$ (Desig. triangular)
$| \vec{v} \cdot \vec{w} | \leq \| \vec{v} \| \cdot \| \vec{w} \|$ (Desig. Cauchy-Schwartz)

Clase de hoy. §2.14. Ángulo entre vectores.

Def (vector unitario). Un vector se dice unitario si su norma es 1.

Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{\| \vec{v} \|}$ tiene norma 1. En efecto,
$$\| \vec{w} \| = \left\| \frac{\vec{v}}{\| \vec{v} \|} \right\| = \frac{1}{\| \vec{v} \|} \cdot \| \vec{v} \| = 1.$$



Considere $\vec{v}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Los vectores forman un $\measuredangle\ \theta$.

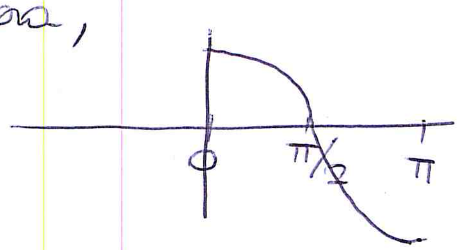
De la desig. de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \le \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

$$\Rightarrow -\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \le \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \le \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

$$\Rightarrow \quad -1 \le \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \le 1$$

Ahora,



Dado que $\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \in [-1, 1]$ y $\cos\theta \in [-1, 1]$, existe un único θ tal que

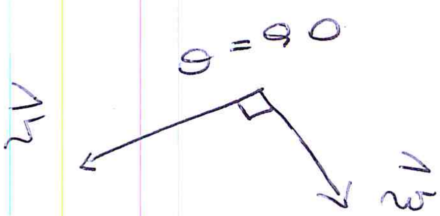
$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \qquad \theta \in [0, \pi].$$

Def. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. El ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el único θ tal que $\cos\theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$.

EJEMPLO. Sea $\vec{v} = (1, 0, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 0)$. Entonces

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/2$$



En este caso se dice que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

EJEMPLO. Sea $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 2, 0)$.

Entonces $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$
$\|\vec{w}\| = 2\sqrt{2}$

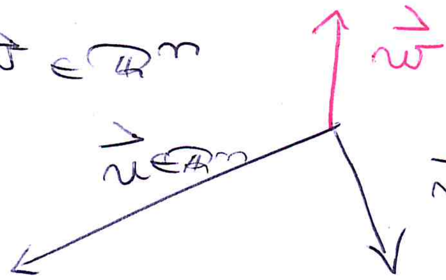
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \theta = \pi$$

En este caso $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos. Nótese que

$$\vec{w} = 2\vec{v}.$$

§ 2.1.5 Producto cruz en $\mathbb{R}^3$.

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$



$\vec{w}$: $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Cómo encontramos $\vec{w}$?

Respuesta: Producto cruz

Def. (Producto cruz). Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Se define

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Recuerde que
$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$
$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$
$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

Entonces

$$\vec{u} \times \vec{v} = \hat{i}(u_2 v_3 - u_3 v_2) - \hat{j}(u_1 v_3 - u_3 v_1) + \hat{k}(u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, \; u_1 v_3 - u_3 v_1, \; u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Nota importante: El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJEMPLO. Sean $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Encuentre $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solución.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-2) - \hat{\jmath} \quad + \hat{k}(-2)$$

$$= (-2, 0, 2).$$

Ahora, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (-2, 0, 2) \cdot (1, 2, -1) = 0$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = (-2, 0, 2) \cdot (1, 0, -1) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}.$$
$$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}. \quad \blacksquare$$

Prop. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

Entonces

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Demostración.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Entonces,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Nótese que $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Propiedades.

1. $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$ $\quad \forall \vec{u}\in\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{u} \perp \vec{u}\times\vec{v}$ $\quad \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$.
   $\vec{v} \perp \vec{u}\times\vec{v}$
3. $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$ $\quad \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$.
4. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$ $\quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$.
5. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$ $\quad$ "
6. $\lambda(\vec{u}\times\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(\lambda\vec{v})$.

Ejercicio. Simplificar la expresión

$$[(\vec{u}+\vec{v})\times(2\vec{u}-\vec{v})]\cdot\vec{u}.$$

Solución.

$$(\vec{u}+\vec{v})\times(2\vec{u}-\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v})\times(2\vec{u}) + (\vec{u}+\vec{v})\times(-\vec{v})$$

$$= \vec{u}\times(2\vec{u}) + \vec{v}\times(2\vec{u}) + \vec{u}\times(-\vec{v}) + \vec{v}\times(-\vec{v})$$

$$= 2\underbrace{\vec{u}\times\vec{u}}_{\text{Prop. 1}\Rightarrow=\vec{0}} + 2\vec{v}\times\vec{u} - \vec{u}\times\vec{v} - \underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{\text{Prop. 1}\Rightarrow=\vec{0}}$$

$$= 2\vec{v}\times\vec{u} - \vec{u}\times\vec{v} = -2\vec{u}\times\vec{v} - \vec{u}\times\vec{v} \quad \text{(Prop. 3)}.$$

$$= -3\vec{u}\times\vec{v}$$

Luego, $[(\vec{u}+\vec{v})\times(2\vec{u}-\vec{v})]\cdot\vec{u} = -3(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}$

$$= 0.$$

Identidad de Lagrange: Para cada $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$(\vec{v}\cdot\vec{w})^2 + \|\vec{v}\times\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2.$$

Nótese que, dado que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \cos\theta$

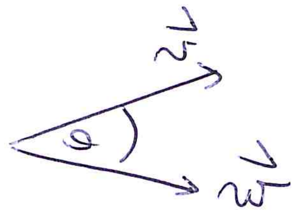
Entonces,

$$\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \cos^2\theta + \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2$$

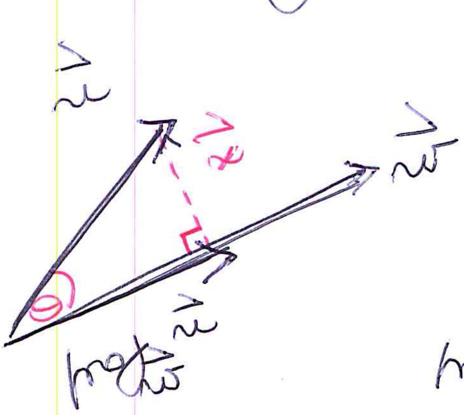
$$\Rightarrow \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 (\underbrace{1 - \cos^2\theta}_{\sin^2\theta})$$

$$= \sin^2\theta \, \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2$$

Prop. ($\measuredangle$ entre vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$). Sean $\vec{v}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ entonces $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = |\sin\theta| \, \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ donde $\theta \in [0, \pi]$



§2.2.1 Proyecciones.



Vamos a proyectar un vector $\vec{u}$ sobre $\vec{w}$.

Nótese que $\mathrm{proy}_{\vec{w}} \vec{u} \parallel \vec{w}$, es decir $\mathrm{proy}_{\vec{w}} \vec{u}$ es paralelo a $\vec{w}$. Entonces

$$\mathrm{proy}_{\vec{w}} \vec{u} = t \cdot \vec{w}.$$

¿Cómo encontramos t?

De la figura, se tiene que $\vec{u} = \vec{x} + \mathrm{proy}_{\vec{w}} \vec{u}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{u}.$$

Ahora, $\vec{x}$ es $\perp$ a $\operatorname{proj}_{\vec{w}} u$, entonces

$$\vec{x} \cdot \operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{u} = 0.$$

$$(\vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{u}) \cdot \operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{u} = 0.$$

$$\Rightarrow (\vec{u} - t\vec{w}) \cdot t\vec{w} = 0.$$

$$\Rightarrow \cancel{t}\, \vec{w} \cdot \vec{u} - t^{\cancel{2}}\, \vec{w} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = t\, \vec{w} \cdot \vec{w}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{w}\|^2}$$

Entonces $\operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{u} = \underbrace{\frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{w}\|^2}}_{\in \mathbb{R}} \vec{w}$