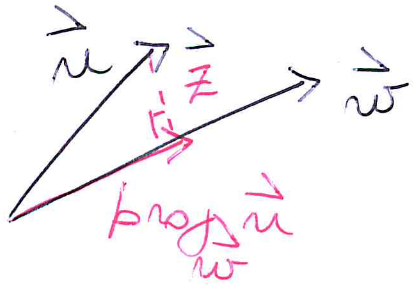
Clase 12

De la clase pasada.

1) Proyección.



$$\text{proy}_{\vec w}\vec u = \underbrace{\frac{\vec u\cdot\vec w}{\|\vec w\|^2}}_{\text{escalar}}\ \underbrace{\vec w}_{\text{vector}}$$

$\vec z \perp \vec w$

$z = \vec u - \text{proy}_{\vec w}\vec u$ Componente ortogonal de $\vec u$ a $\vec w$.

2) Rectas: $L = \{p + \lambda\vec d,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$

p - punto por donde pasa la recta L

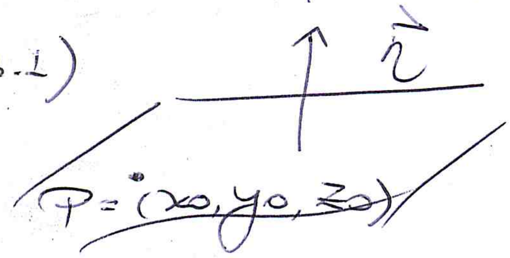
$\vec d$ - vector director.

3) Planos: $\Pi = \{p + \alpha\vec u + \beta\vec v : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

$\vec u, \vec v$: vectores $\neq \vec 0$

p : punto que pertenece al plano.

3.1)

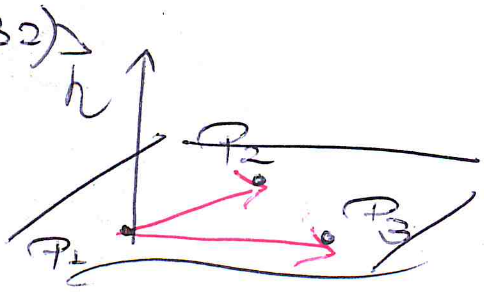


Plano tiene ec. de la forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

$\vec n = (a, b, c)$.

3.2)



$\vec n = \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}$.

EJERCICIO.

1) Determine la ec. del plano que pasa por los puntos

$$P_1=(2,-2,1),\ P_2=(-1,0,3);\ P_3=(5,-3,4).$$

Solución. Construimos los vectores $\vec{P_1P_2}$ y $\vec{P_1P_3}$:

$$\vec{P_1P_2}=P_2-P_1=(-3,2,2)$$
$$\vec{P_1P_3}=P_3-P_1=(3,-1,3)$$

Vector normal: $\vec{n}=\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(6+2)-\hat{j}(-9-6)+\hat{k}(3-6)$$
$$=8\hat{i}+15\hat{j}-3\hat{k}=(8,15,-3).$$

Ec. del plano: $8x+15y-3z+d=0.$

Valor de d? Usamos que $P_1\in$ al plano. Entonces,

$$8\cdot 2+15\cdot(-2)-3\cdot 1+d=0$$
$$\Rightarrow d=+30-16+3=17$$

Conclusión: $\boxed{8x+15y+3z+17=0}$

Teorema 2.2.1. Dados dos planos

$$\Pi_1=a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0.$$
$$\Pi_2=a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

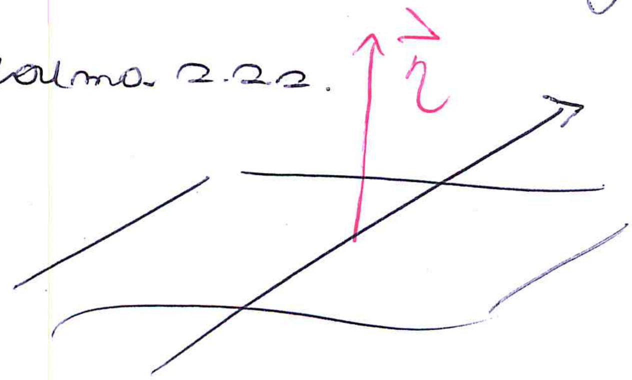
Se tiene que

1) $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ si $(a_1, b_1, c_1) \parallel (a_2, b_2, c_2)$

2) $\Pi_1 \perp \Pi_2$ si $(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = 0$

3) $\Pi_1 = \Pi_2$ si $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$
y $d_1 = k d_2$ donde $k \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.22.



$L = p + \lambda \vec{d}$

$\Pi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$

Se tiene que:

1) $L \parallel \Pi$ si $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$.

2) $L \perp \Pi$ si $\vec{n} \parallel \vec{d}$.

EJERCICIO.

Sea $\Pi = \{x + z + 2 = 0\}$. Encuentre los rectas paralelas y perpendiculares a Π.

Solución. Vector normal al plano $(1, 0, 1)$. Entonces,

1) Rectas paralelas a Π.

$$(1, 0, 1) \cdot (d_1, d_2, d_3) = 0.$$
$$\Rightarrow d_1 + d_3 = 0$$
$$\Rightarrow d_1 = -d_3.$$

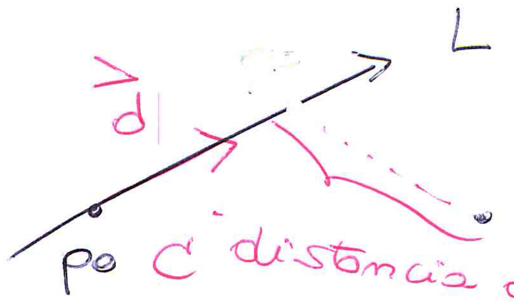
Entonces, $\vec{d} = (d_1, d_2, -d_1)$.

Rectas paralelas a Π: $L = p + \lambda(d_1, d_2, -d_1)$.

2) Ejercicio.

Distancia de un punto a una recta

$L: P_0 + \lambda \vec{d}$



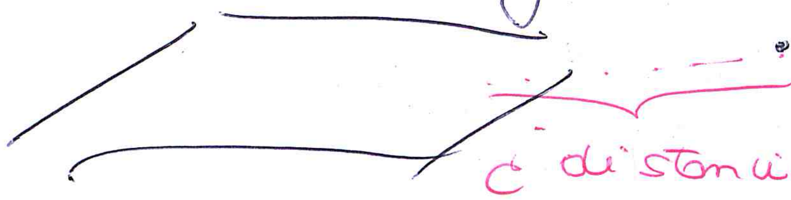
Nótese que p no pertenece a la recta.

¿distancia de p a L?

$$d(p, L) = \frac{\|\vec{d} \times \vec{P_0P}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Distancia de un punto a un plano

$$\pi = ax + by + cz + d = 0$$



$P_0 = (x_0, y_0, z_0).$

¿distancia de P_0 a π?

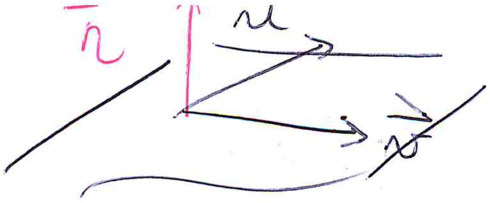
$$d(P_0, \pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ejercicio. Encuentre la distancia del punto $P_0 = (5, 5, 3)$ al plano $\pi = (0, 0, -4) + \alpha(2, 2, -1) + \beta(-3, 2, 0)$.

Solución. El plano π está en forma

$$\pi = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + P$$

Se debe llevar a la forma $\pi = ax + by + cz + d = 0$



$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 10)$$

$$\Pi = 2x + 3y + 10z + d = 0.$$

Encontrar d: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 10 \cdot -4 + d = 0$

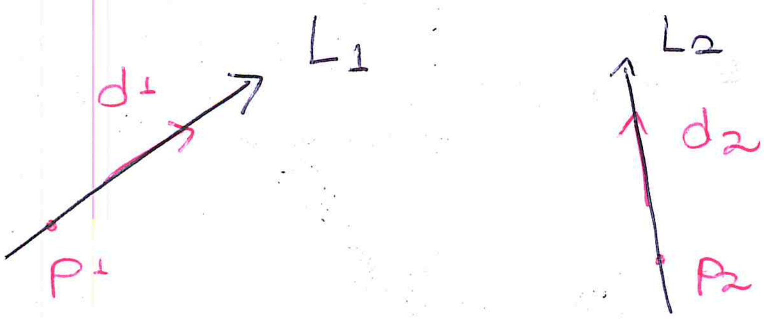
$$\Rightarrow d = 40.$$

Entonces, $\boxed{\Pi = 2x + 3y + 10z + 40 = 0.}$

Ahora,

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 40|}{\sqrt{4 + 9 + 100}} = \frac{95}{\sqrt{113}}$$

Distancia entre rectas.



Distancia mínima entre L_1 y L_2:

$$d\,\text{mín}(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \quad \text{donde}$$

$$\vec{n} = \vec{d_1} \times \vec{d_2}.$$

EJERCICIO. Encuentre la distancia mínima entre las rectas: (6)

$$L_1 : (1,1,4) + t(0,1-3)$$

$$L_2 : \quad x = 4+\lambda,\ y = 5,\ z = -3+2\lambda.$$

Solución.

L_1. recta directa $\vec{d_1} = (0,1,-3)$

L_2. recta directa $\vec{d_2} = (1,0,2)$

Nótese que $L_2 : \quad x = 4+\lambda\ ,\ y = 5,\ z = -3+2\lambda,$

entonces $(x,y,z) = (4+\lambda, 5, -3+2\lambda)$

$$= (4,5,-3) + \lambda \cdot (1,0,2)$$

Ahora, $\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (4,5,-3) - (1,1,4)$

Considere $P_2 = (4,5,-3)$

$P_1 = (1,1,4)$

$$= (3,4,-7).$$

Entonces,

$$d\,min(L_1, L_2) = \frac{|\vec{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\cdot 2 - \hat{\jmath}\cdot 3 + \hat{k}(-1)$$

$$= (2,-3,-1)$$

$$\Rightarrow \quad d\,min(L_1, L_2) = \frac{|(3,4,-7)\cdot(2,-3,-1)|}{\|(2,-3,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$