Clase 14 | 27/09/2016. ①

De la clase pasada: V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si existen

$$+: V\times V \longrightarrow V$$
$$(v,w) \longmapsto v+w$$

$$\cdot: \mathbb{K}\times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha,v) \longmapsto \alpha\cdot v$$

tales que

1. $\forall u,v\in V: \ u+v=v+u.$
2. $\forall u,v,w\in V: \ u+(v+w)=(u+v)+w.$
3. $\exists\, 0_V\in V: \ u+0_V=0_V+u=u \ \forall u\in V.$
4. $\forall u\in V, \exists(-u)\in V: \ u+(-u)=0_V.$
5. $\forall u,v\in V, \forall \alpha\in\mathbb{K}: \ \alpha(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$
6. $\forall u\in V, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}: \ (\alpha+\beta)u=\alpha\cdot u+\beta u.$
7. $\forall u\in V, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}: \ (\alpha\cdot\beta)\cdot u=\alpha\cdot(\beta\cdot u).$
8. $\forall u\in V, \ 1\cdot u=u.$

Prop. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces,

(1) 0_V es único.

(2) $\forall v\in V \ \exists$ un único $(-v)\in V: \ v+(-v)=0_V.$

(3) $\forall v\in V: \ 0\cdot v=0_V.$

(4) $\forall \alpha\in\mathbb{K} \ \forall v\in V: \ (-\alpha)v=-(\alpha v).$

Demostración (1). Supongamos que existen dos elementos neutros: 0_V y $0_V'$. Entonces,

$0_V + 0_V' = 0_V$ (usando $0_V'$ como neutro) (2)

$0_V' + 0_V = 0_V'$ (usando 0_V como neutro)

Prop (1) $\Rightarrow$ $\boxed{0_V = 0_V + 0_V' = 0_V' + 0_V = 0_V'}$

(3) Calculemos $0\cdot v = (0+0)\cdot v = 0\cdot v + 0\cdot v \quad / -0v$

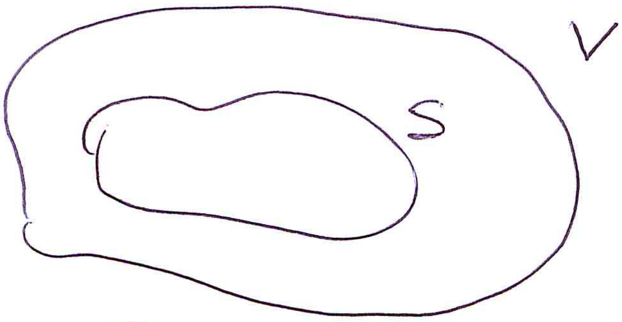
$$\boxed{0_V = 0\cdot v}$$

§ 3.2 Subespacio Vectorial.

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $S \subseteq V$. Se dice que $(S,+,\cdot)$ es un subespacio vectorial de V si $(S,+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

Nota: Si $(S,+,\cdot)$ es un subespacio vectorial de $(V,+,\cdot)$ entonces: $S \leq V$ es la notación.

Nota: La definición anterior nos obliga a revisar las prop (1)-(8) de la definición de espacio vectorial. Esto NO es necesario!



$$+ : S \times S \longrightarrow S$$
$$(v, w) \longmapsto v + w$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times S \longrightarrow S$$
$$(\alpha, v) \longmapsto \alpha v$$

Se necesita que $+$ y $\cdot$ sean cerrados en S.

Propiedades (1)-(8).

(1) ✓ (2) ✓ (3) Se necesita que $0_V \in S$.

(4) Se necesita que exista inverso aditivo en S.

(5) ✓ (6) ✓ (7) ✓ (8).

Por lo tanto se puede enunciar el siguiente resultado

Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. $(S, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial de V si y sólo si.

1) $0_V \in S$.

2) $\alpha u + v \in S \quad \forall u, v \in S \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Nota. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces existen dos subespacios triviales:

$$S = \emptyset, \quad S = V.$$

EJEMPLOS.

1. Considere $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Demuestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Solución.

1) $(0,0) \in W$ pues $0 = 0$. Además, se tiene que $W \neq \emptyset$.

2) Sean $u, v \in W \Rightarrow$ $u = (x_1, y_1)$, $y_1 = 0$
$v = (x_2, y_2)$, $y_2 = 0$.

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces calculamos

$$\alpha u + v = \alpha(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2).$$

Nótese que $\alpha y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow \alpha u + v \in W$ $\blacksquare$ (4)

2. Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0\}$. Demuestre que $E \leq \mathbb{R}^3$.

Solución.

1) $(0,0,0)$ satisface que $2 \cdot 0 + 0 = 0$

$$\Rightarrow (0,0,0) \in E$$
$$\Rightarrow E \neq \phi.$$

2) Sean $u, v \in E$. Entonces,

$$u = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow 2x_1 + y_1 = 0.$$
$$v = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow 2x_2 + y_2 = 0.$$

Ahora, calculamos

$$\alpha u + v = \alpha(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$
$$= (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2).$$

Nótese que

$$2 \cdot (\alpha x_1 + x_2) + \alpha y_1 + y_2 = \underbrace{\alpha\underbrace{(2x_1 + y_1)}_{=0} + \underbrace{2x_2 + y_2}_{=0}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \alpha u + v \in E \ \blacksquare$$

Prop. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sean $W_1, W_2 \leq V$. Entonces,

1) $W_1 \cap W_2 \leq V$
2) $W_1 + W_2 \leq V$, donde

$$W_1 + W_2 = \{u + v,\ u \in W_1, v \in W_2\}.$$

Demostración. (1)

- $0_V \in W_1 \cap W_2$. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} W_1 \leq V \Rightarrow 0_V \in W_1 \\ W_2 \leq V \Rightarrow 0_V \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0_V \in W_1 \cap W_2.$$

- Sean $u, v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u \in W_1$ y $u \in W_2$
$\Rightarrow v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow v \in W_1$ y $v \in W_2$

Entonces

$$\alpha u + v \in W_1, \text{ pues } W_1 \leq V$$
$$\alpha u + v \in W_2, \text{ pues } W_2 \leq V$$
$$\Rightarrow \alpha u + v \in W_1 \cap W_2.$$

(2) Ejercicio.

Nota. $W_1 \cup W_2$ no es necesariamente un subespacio vectorial. Considere

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}.$$
$$W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Entonces, $W_1 \cup W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ o } y = 0\}$.

Ahora, nótese que

$$(0, 1) \in W_1,$$
$$(1, 0) \in W_2.$$

Pero $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$
$\Rightarrow W_1 \cup W_2$ NO ES un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Espacio Generado.

Def (combinación lineal) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ y $u_1, \dots, u_m \in V$ donde V es un espacio vectorial. La expresión

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$$

es una combinación lineal de $\{u_i\}_{i=1}^{m}$.

EJEMPLO. $V = \mathbb{R}^3$. $(0, 2, -3)$ es una combinación lineal de $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$.

En efecto

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (0,2,-3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 2 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2, \ \beta = 5, \ \gamma = -3 \ \blacksquare$$