De la clase pasada:

$(V,+,\cdot)$ - espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que $S \subseteq V$, $S \neq \phi$ es un subespacio vectorial de V si

1) $0_V \in S$.

2) $\alpha u + v \in S \quad \forall u, v \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Combinación lineal. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ y $u_1, \dots, u_m \in V$, donde V es un espacio vectorial. La expresión

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m$$

es una combinación lineal de $\{u_j\}_{j=1}^{m}$.

Espacio generado: El espacio generado por el conjunto X, que se denota por $G(X)$ o $\langle X \rangle$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de elementos de X,

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

EJERCICIO. Encuentre el conjunto generador del subespacio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \leq M_2(\mathbb{R}).$$

Solución. Tarea. Pruebe que efectivamente $W \leq M_2(\mathbb{R})$

Nótese que

$$W = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Por lo tanto el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera el conjunto W; matrices simétricas en $M_2(\mathbb{R})$.

EJERCICIO. Repita el ejercicio anterior con U = matrices antisimétricas.

Independencia lineal. Se dice que $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es linealmente independiente (l.i) ssi

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = 0_V \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m.$$

$\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es linealmente dependiente (l.d) ssi $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos nulos tal que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = 0_V$.

Nota: 1) Todo conjunto que contenga 0_V es l.d.

2) Si un conjunto M es l.i entonces cualquier subconjunto de M también lo es.

3) Si un conjunto N es l.d entonces cualquier conjunto que contenga N es l.d.

EJERCICIO. ¿Bajo qué cond. para λ los vectores $(\lambda, 1, 0)$ $(1, \lambda, 1)$ y $(0, 1, \lambda)$ son l.i en $\mathbb{R}^3$?

Solución. Se necesita que

$$\alpha(\lambda,1,0)+\beta(1,\lambda,1)+\gamma(0,1,\lambda)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Sistema lineal.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Sistema lineal tiene solución única $\alpha=\beta=\gamma=0$ si $\det(A)\neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda(\lambda^2-1)-1\cdot(\lambda)=\lambda^3-\lambda-\lambda \\ &= \lambda^3-2\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2-2) \end{aligned}$$

$\det(A)\neq 0$ si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq\pm\sqrt{2}$.

§3.4. Bases y dimensión.

Def (base). Sea B un subconjunto finito de V. Se dice que B es una base de V si

1) $\langle B\rangle = V$
2) B es l.i.

Teorema: Todo espacio vectorial V tiene una base.

EJERCICIO. Encuentre una base para W, donde

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\leq M_2(\mathbb{R}).$$

Solución. Se sabe que

$$\Big\langle \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{B}\Big\rangle = W$$

Es decir $\langle B \rangle = W$. ¿B es l.i.?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\Rightarrow B$ es l.i.

Conclusión. B es l.i y $\langle B \rangle = W \Rightarrow B$ es base para W. ∎

Ejercicio. Encuentre una base para $\mathbb{R}^3$.

Solución. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$\Rightarrow B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Además, B es l.i. En efecto,

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \ ∎$$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Teorema. Sea V un espacio vectorial con base B de cardinalidad n. Entonces cualquier subconjunto de V de cardinalidad $n+1$ es l.d.

EJEMPLO. ¿Es el conjunto

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\} \text{ l.i?}$$

Respuesta. No. Tiene 4 elementos y toda base de $\mathbb{R}^3$ (la base canónica) tiene 3 elementos.

Demostración Teorema: Sea $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ base de V y $v\in V$ tal que $v\notin B$. Construya $B\cup\{v\}$. Como B es base de V entonces

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - v = 0_V$$

y no todos los α_i son no nulos

$$\Rightarrow B\cup\{v\} \text{ es l.d} \quad \blacksquare$$

Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Suponga que B es una base de V con cardinalidad n. Entonces, TODA BASE DE V TIENE CARDINALIDAD n.

EJEMPLO. $V=\mathbb{R}^3$. Cualquier base de $\mathbb{R}^3$ tiene cardinalidad 3.

EJEMPLO. $V=\mathbb{R}_2[x]=\{a+bx+cx^2;\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$.

Nótese que $\mathbb{R}_2[x]=\langle 1,x,x^2\rangle$. Además $\{1,x,x^2\}$ es l.i pues $\alpha\cdot 1+\beta\cdot x+\gamma\cdot x^2 = 0\cdot 1+0\cdot x+0x^2$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

$$\Rightarrow \{1,x,x^2\} \text{ es base de } \mathbb{R}_2[x]$$

Conclusión. Cualquier base de $\mathbb{R}_2[x]$ tiene 3 elementos!

Dimensión de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n,$$

es decir, la dimensión de V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es n.

EJEMPLOS.

1. $V = \mathbb{R}^3$. $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$$

2. $V = \mathbb{R}^n$. $B = (1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots (0,0,\dots,1)\}$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n.$$

3. $V = \mathbb{R}_2[x]$ $B = \{1, x, x^2\}$.

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[x] = 3.$$

4. $V = \mathbb{R}_n[x]$. $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1.$$

5. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4.$$