Clase 9

§2.1. Vectores en el plano y en el espacio.

Un vector en $\mathbb{R}^n$ es una n-tupla

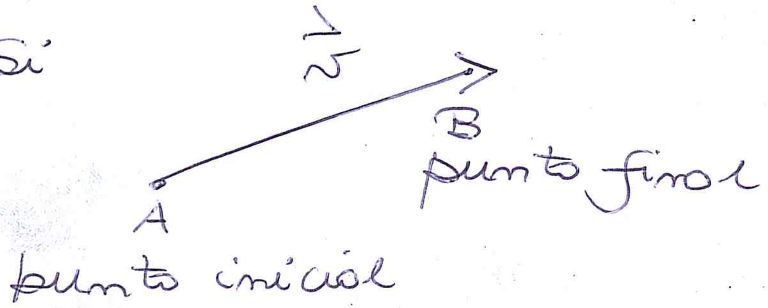
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Notación: 1) $x_i \to$ componente i-ésima del vector.

2) Los vectores, usualmente, se denotan por

$$\vec{v}, \ \vec{w}, \ \vec{z}.$$

3) Si



Entonces $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

4) Vector Nulo $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

5) En $\mathbb{R}^3$:
$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{k} = (0, 0, 1).$$

§2.1.1. Operaciones básicas.

Igualdad de vectores. Los vectores $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ son iguales si

$$n = m$$
$$v_i = w_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Suma de vectores. Sean $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ vectores. Se define

$$\vec{v}+\vec{w}=(v_1+w_1, v_2+w_2, \dots, v_n+w_n).$$

Producto por escalar. Si $\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ y $k\in\mathbb{R}$. Se define

$$k\vec{v}=(kv_1, kv_2, \dots, kv_n).$$

Prop. Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Entonces,

1. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
2. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
3. $\exists -\vec{v}\in\mathbb{R}^n : \vec{v}+(-\vec{v})=0$
4. $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
5. $\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}$
6. $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$
7. $\alpha(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)\vec{v}$
8. $0\vec{v}=\vec{0}$
9. $1\vec{v}=\vec{v}$.

§ 2.1.2. Producto punto y norma.

Def. Sean $\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ y $\vec{w}=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{R}^n$. Se define el producto punto entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$ o $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ como

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

EJEMPLO.

1. Calcule $(1,7,-3)\cdot(5,-1,2)$.

Solución

$$(1,7,-3)\cdot(5,-1,2) = 1\cdot 5 + 7\cdot(-1) + (-3)\cdot 2$$
$$= 5 - 7 - 6 = -8$$

2. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(\alpha, 4)\cdot(\alpha,-9)=0$

Solución Nótese que

$$0 = (\alpha, 4)\cdot(\alpha,-9) = \alpha^2 - 36$$
$$\Longrightarrow \alpha = \pm 6.$$

Teorema. Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $\vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$.
2. $\vec{v}\cdot\vec{0} = 0$
3. $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$
4. $\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{u}) = \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{u}$
5. $(\alpha\vec{v})\cdot\vec{w} = \alpha(\vec{v}\cdot\vec{w})$.

Demostración.

1. $\vec{v}\cdot\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0$.
2. $\vec{v}\cdot\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot 0 = 0$.
3. $\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i = \vec{w}\cdot\vec{v}$

4. $\vec{v}(\vec{w}+\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(w_i+u_i)$ (4)

$= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{u}$

5. Ejercicio.

§ 2.1.3. Norma de un vector.

Def. Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Se define la norma o magnitud de $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Def. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Se define la distancia entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|.$$

EJEMPLO. Nótese que

$n=1$: $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$

$= (v - w^2)^{1/2} = |v - w|.$

$n=2$: $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$.

$= \sqrt{\langle \vec{v}-\vec{w}, v-\vec{w} \rangle}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (v_i - w_i)^2}$

$= \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)}$.

Prop. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$ y $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$.

2. $\| \alpha \vec{v} \| = |\alpha| \, \| v \|$

3. $\| \vec{v} - \vec{w} \| = \| \vec{w} - \vec{v} \|$

4. $\| \vec{v} + \vec{w} \| \leq \| \vec{v} \| + \| \vec{w} \|$ (Desigualdad triangular)

5. $| \vec{v} \cdot \vec{w} | \leq \| \vec{v} \| \, \| \vec{w} \|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwartz).

Demostración.

1, 2, 3. Ejercicio.

5. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Luego $\forall t \in \mathbb{R}$:

$\| t\vec{u} + \vec{v} \| \geq 0$

$$\Rightarrow (tu_1 - v_1)^2 + (tu_2 - v_2)^2 + \cdots + (tu_n - v_n)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{t^2 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right) - 2t \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} v_i^2}_{\text{Ec. cuadrática en } t} \geq 0.$$

Luego $\Delta \leq 0$

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)$$

$$= 4 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4 \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4 \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2$$

$$\Rightarrow | \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle | \leq \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \|.$$

4. $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$

$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$

$= \| \vec{u} \|^2 + 2 \langle u, \vec{v} \rangle + \| \vec{v} \|^2$

$\leq \| \vec{u} \|^2 + 2 \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| + \| \vec{v} \|^2 = (\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|)^2$

$$\Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Def. Un vector se dice unitario si tiene norma 1.

Ej. $n=3$: Los vectores $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ tienen norma 1.

En general, dado $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, el vector

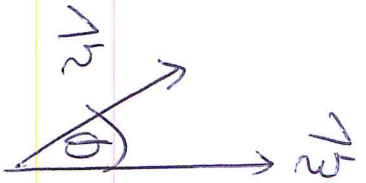
$$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

tiene norma 1. En efecto

$$\|\vec{w}\| = \left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{v}\| = 1.$$

§ 2.1.4. Ángulo entre vectores.

Considere $\vec{v}, \vec{w}\in\mathbb{R}^2$. $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman un $\measuredangle$ que llamaremos θ.



Nótese que:

$$\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = (\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})$$
$$= \|\vec{v}\|^2 - 2\langle\vec{v},\vec{w}\rangle + \|\vec{w}\|^2$$
$$= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$$

Desigualdad de Cauchy Schwartz

$$|\langle\vec{v},\vec{w}\rangle| \le \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$$

$$\Rightarrow -1 \le \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \le 1$$

Luego, dado que $\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \in [-1, 1]$,

$\exists$ un único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

Def.

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. El angulo θ entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta .$$