Clase 1 | 04/09/2017. (1)

§1. Matrices.

Motivación. Solución de sistemas lineales.

Considere el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 6y + z = 7 \\ x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

→ 3 ecuaciones y 3 incógnitas $x, y, z$.

¿Cómo se puede resolver este sistema?

¿ " en el caso en que el número de incógnitas es $N \gg 1$?

§1.1.1 Conceptos básicos de matrices.

Def (Matriz) Una matriz es un arreglo de la forma

$$\begin{array}{cc} & \text{columna } j \\ \text{fila } i & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & a_{ij} & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Matriz de orden $n \times m$ con coeficientes $a_{ij}$. Precisamente

$a_{ij}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$

Se conoce como entrada, elemento o coeficiente de la matriz.

Notación para matrices: $A, B, C$, o bien

$(a_{ij})_{n \times m}$, $(b_{ij})_{n \times m}$, $(c_{ij})_{n \times m}$, o bien

$(a_{ij})$, $(b_{ij})$, $(c_{ij})$.

Conjunto de matrices: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ - matrices de orden $m\times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. (2)
$M_{m\times n}(\mathbb{C})$ - matrices de orden $m\times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$.

EJEMPLOS.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-i \\ i & 0 & 3i \end{pmatrix}$.

Nótese que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

2. $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = i+j$ está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Def. Matriz de orden $m\times 1$ se llama vector columna

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Matriz de orden $1\times n$ se llama vector fila

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Def. La matriz $(a_{ij})_{m\times n}$ tal que $a_{ij} = 0$ $\forall i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\}$ se conoce como matriz nula. Notación $[0]_{m\times n}$.

$$[0]_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notación. Matrices de orden $n \times n$ se conocen como matrices cuadradas.

Nótese que $n = m \Rightarrow$ número de filas = número de columnas.

$M_{n\times n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ – Conjunto de matrices de orden $n \times n$ con coef. reales

$M_{n\times n}(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ " complejos

Def. Diagonal principal y secundaria. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se conoce como diagonal principal de $A$. La matriz

$$\begin{pmatrix} & & & a_{1n} \\ & 0 & a_{2n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

Se conoce como diagonal secundaria de $A$.

Def. Sea $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $b_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ luego $B$ se llama matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo FUNDAMENTAL: Matriz identidad

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Matrices triangulares</u>: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A se llama <u>triangular inferior</u>. Nótese que

$$a_{ij} = 0 \quad \forall \; i < j.$$

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A se llama triangular superior. Nótese que

$$a_{ij} = 0 \quad \forall \; i > j.$$

<u>Traza de una matriz</u> Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se define

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

EJEMPLOS.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1 - 1 = 0.$

Nótese que $A \neq 0$ y $tr(A) = 0$. Además,

$$tr(A) = 0 \not\Rightarrow A = 0.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1 + 2 + \cdots + n$

$$= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

§ 1.1.2. Operaciones con matrices.

Igualdad de Matrices: A y B son iguales si

1) tienen el mismo orden.

2) $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$.

Suma de Matrices: Sean $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

Se define la suma de $A + B$:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times m}, \text{ es decir}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ & \vdots & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Multiplicación por escalar: Sea $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ luego (6)

$$\alpha A = \alpha (a_{ij})_{n \times m} = (\alpha a_{ij})_{n \times m}.$$

Ejercicio. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B).$$

Demostración. Se tiene que

$$tr(A+B) = a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$= \underbrace{a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}_{tr(A)} + \underbrace{b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}}_{tr(B)}. \blacksquare$$

Ejercicio. Encuentre $x, y$ tal que

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 11 & y \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 2x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2+x \\ 11 & 2+2x \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 11 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2+x \\ 11 & 2+2x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2+x=3 \\ 2+2x=y \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=4. \end{array}$$

Multiplicación de Matrices. Sean $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$, se define $C = AB \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Nótese que

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{im}} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & \boxed{b_{ij}} & \cdots & b_{ip} \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & \boxed{b_{mj}} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \to c_{ij}$$ (7)

EJEMPLO. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Luego $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

$\blacksquare$