Clase 2 | 07/09/2017.

§ 1.1.3 Prop. de las operaciones matriciales.

Sean A, B, C matrices (con órdenes tales que las operaciones siguientes se puedan obtener) y α, β escalares. Luego,

(1) $A + B = B + A$.

(2) $(A+B) + C = A + (B+C)$.

(3) $A + [0] = A$ / $[0]$ = matriz nula.

(4) $A + (-1)\cdot A = [0]$.

(5) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

(6) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

(7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)\cdot A$

(8) $1\cdot A = A$.

(9) $(AB)C = A(BC)$.

(10) $A(B+C) = AB + AC$.

(11) $\alpha(AB) = (\alpha A)\cdot B = A(\alpha B)$.

(12) $A \in M_{m\times m} \Rightarrow I_m \cdot A = A = A \cdot I_m$.

Ejercicio: 1 Demostrar Prop (5). Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego

$$[\alpha(A+B)]_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = \alpha[A]_{ij} + \alpha[B]_{ij}.$$
$$\Rightarrow \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad \blacksquare$$

2 Demostrar Prop (10). Sean $B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $A \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$. Luego

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}$$
$$= [A\cdot B]_{ij} + [A\cdot C]_{ij}.$$
$$\Rightarrow A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C \quad \blacksquare$$

Nota 1: Producto matricial no es conmutativo.

EJEMPLO.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Nota 2: $AB = [0] \not\Rightarrow A = [0] \text{ o } B = [0]$.

EJEMPLO.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

§1.2.1. Matriz Traspuesta.

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. La matriz transpuesta de

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Se define como

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & a_{n2} \\ a_{13} & & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Nótese que $A^T \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji} \quad \forall i,j.$$

EJEMPLO. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

Luego, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \blacksquare$

Propiedades.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, A y B matrices tales que las operaciones siguientes están bien definidas. Luego,

(1) $(A^T)^T = A$.

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

(5) $(A^m)^T = (A^T)^m$.

Demostración de (4). Sea $C = AB$. Si $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m \times p}(\mathbb{R}) \Rightarrow C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Luego

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Entonces

$$(C^T)_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{m} b^T_{ik} a^T_{kj}$$
$$= (B^T A^T)_{ij}$$
$$\Rightarrow C^T = B^T A^T \quad \blacksquare$$

Matrices Simétricas y Antisimétricas.

A se dice simétrica si $A = A^T$.

A se dice antisimétrica si $A = -A^T$.

EJEMPLOS.

1). $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = A^T \Rightarrow A$ es simétrica.

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -B$ ④

$\Rightarrow B^T = -B \Rightarrow B$ es antisimétrica.

Propiedades. Sean $A, B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ simétricas.
Entonces,

(1) $A + B$ es simétrica
(2) αA es simétrica.

Demostración.

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B$ es simétrica
(2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \Rightarrow \alpha A$ es simétrica.

Propiedades. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ cuadrada.
Luego,

(1) $A + A^T$ es simétrica
(2) AA^T y $A^T A$ son simétricas.
(3) $A - A^T$ es antisimétrica.

Demostración.

(1) $(A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T$
$\Rightarrow A + A^T$ es simétrica.

(2) $(A A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$
$\Rightarrow A \cdot A^T$ es simétrica.

(3) $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$
$\Rightarrow A - A^T$ es antisimétrica. $\boxtimes$

Nota. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Luego

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{parte simétrica de } A} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{parte antisimétrica de } A}$$

EJERCICIOS.

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = [0]$. Pruebe que
$$A \cdot (I+A)^m = A \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Solución. Nótese que
$$(I+A)^m = \sum_{k=0}^{m} A^k I^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} A^k$$

Luego,
$$(I+A)^m = I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^m$$
$$= I + A + [0] + [0] + \cdots + [0] = I + A$$
$$\Rightarrow A \cdot (I+A)^m = A(I+A) = A + A^2 = A + [0] = A \quad \blacksquare$$

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisimétrica. Muestre que los elementos de su diagonal son nulos.

Solución. A es antisimétrica, luego $A = -A^T$
$$\Rightarrow A + A^T = 0.$$

Consecuentemente $\quad a_{ii} + a_{ii} = 0$
$$\Rightarrow 2a_{ii} = 0$$
$$\Rightarrow a_{ii} = 0 \quad \blacksquare$$

3. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que
$$(x \ \ 4 \ \ -1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Solución.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4 \\ x-2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow (x \ \ 4 \ \ -1) \begin{pmatrix} 2x+4 \\ x-2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$$
$$\Rightarrow x(2x+4) + 4(x-2) - 4 = 0.$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4x - 8 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{10}$$

$\blacksquare$