Clase 3 | 12/09/2017.

Operaciones elementales y Matrices elementales.

En una matriz se pueden hacer 3 operaciones elementales

1) Intercambiar (permutar) dos de sus filas

EJEMPLO. Intercambio entre filas 1 y 3.

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2) Multiplicación de una fila por un escalar.

EJEMPLO. Multiplicar fila 2 por 2.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 8 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3) Sumar el múltiplo de una fila a otra.

EJEMPLO. Multiplicar fila 2 por 2 y sumar a fila 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Estas operaciones definen naturalmente ciertas matrices.

§ 1.4.1 Matrices Elementales.

Una matriz elemental es una matriz que resulta de efectuar una operación elemental en la identidad I_n.

Nótese que

3 operaciones elementales $\Rightarrow$ 3 matrices elementales.

1) E_{ij} : resulta de intercambiar, en la identidad, la fila i con la fila j.

EJEMPLO.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $E_i(\lambda)$: resulta de multiplicar la fila i de la identidad por $\lambda \neq 0$.

EJEMPLO.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $E_{ij}(\lambda)$: resulta de multiplicar la fija j por $\lambda \neq 0$ y sumarla a la fila i.

EJEMPLO.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_{31}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la utilidad de las matrices elementales?
Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nótese que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E_{21}(-2) \cdot A = A_1$$

Ahora,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{31}(-1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A_1} \underset{E_{31}(-1)}{\overset{=}{\longrightarrow}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A_2}.$$

$$\Rightarrow \quad E_{31}(-1) \cdot A_1 = A_2$$

Siguiente paso

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{E_{32}(1/2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A_2} \underset{E_{32}(\frac{1}{2})}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{A_3}$$

$$\Rightarrow \quad E_{32}(1/2)\, A_2 = A_3.$$

Reescribiendo, se tiene que

$$E_{32}(1/2) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_{21}(-2) \cdot A = A_3$$

Importante:
- A_3 es triangular superior
- $E_{32}(1/2)$, $E_{31}(-1)$, $E_{21}(-2)$ son matrices triangulares inferiores. Luego $E_{32}(1/2) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_{21}(-2)$ es triang. inf.

Si $E_{32}(1/2) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_{21}(-2) = L$

$A_3 = U$

$$\Rightarrow \quad L \cdot A = U$$

Descomposición LU de A: fundamental en computación científica.
También se conoce como algoritmo de Gauss.

Además, se tiene que las matrices A y A_3 son equivalentes $\therefore$ $A \sim A_3$.

Definición. Se dice que las matrices A y B son equivalentes por fila si existen operaciones elementales tal que convierten A en B.

EJEMPLO. Considere la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(4)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-7)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Conclusión: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Matriz escalonada por fila. Una matriz se encuentra escalonada por fila si satisface:

(1) Cualquier fila nula se ubica en la parte inferior de la matriz.

(2) En cada fila $\neq 0$, la primera entrada se llama pivote y está a la derecha del pivote de la fila anterior.

(3) Sus pivotes $= 1$.

(4) En cada fila el pivote es el único elemento no nulo de su columna.

EJEMPLOS.

Matrices escalonadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) ✓
(2) pivote fila 1 = 1
(3) ✗
(4) ✓

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) no filas nulas ✓
(2) pivote fila 1 = 1
(3) ✓
(4)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 7 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) no filas nulas ✓
(2) pivote fila 1 = 1
pivote fila 2 = 1
(3) ✓
(4) :(no se cumple!

EJERCICIO. Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ Encuentre su forma escalonada.

Solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-5)]{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Rango de una matriz. Sea A una matriz. El rango de A, rango(A), corresponde al número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a A.

$$\ldots \xrightarrow{E_{12}(2)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -3/5 \\ 0 & \boxed{1} & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLOS.

1) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. rango $(I_3) = 3$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. rango $(A) = 2$

3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Se tiene que

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego, rango $(B) = 2$.

Proposición. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Observación. Notación rango $(A) = \rho(A)$. ▨