Clase 4 | 14/09/2017. 

Considere A. Encuentre su forma escalonada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-5)]{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rango de una matriz.

Sea $A$ una matriz. El rango de $A$, rango$(A)$ o $\rho(A)$, corresponde al número de filas no nulas de su matriz escalonada asociada.

EJEMPLOS.

1) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; rango$(I_3) = \rho(I_3) = 3$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; $\rho(A) = 2$

3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Se tiene que $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego, $\rho(B) = 2$.

Proposición. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces
$$\rho(A) \leq \min\{m, n\}.$$

§1.5. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Considere el sistema de $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema se puede escribir como
$$Ax = b,$$
donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$.

Nótese que $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$, $x \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Solución. Se dice que $x_0 \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ es solución de $Ax = b$ si
$$Ax_0 = b.$$

Sistema Compatible. El sistema $Ax = b$ se llama compatible si tiene al menos una solución. Se dice incompatible si no tiene solución.

Nota importante. Considere el sistema $Ax = b$. Si el sistema tiene dos soluciones diferentes $\Rightarrow \infty$ soluciones.

Demostración. Sean $x_1, x_2$ soluciones de $Ax = b$. Luego
$$Ax_1 = b, \qquad Ax_2 = b.$$

Considere $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Luego,
$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha A x_1 + (1-\alpha) A x_2$$
$$= \alpha b + (1-\alpha) = b.$$

$\Rightarrow$ $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ es solución para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sistemas homogeneos. Sea $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$. El sistema
$$\boxed{Ax = 0}$$
se conoce como sistema homogéneo.

Nótese que $A\cdot 0 = 0 \Rightarrow 0$ es solución.

Propiedades.

1) Un sistema homogéneo es compatible pues $x=0$ es solución.

2) Si $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $A \sim C$. Los sistemas $Ax=0$ y $Cx=0$ tienen las mismas soluciones.

En efecto, si $C \sim A$ esto quiere decir que existen matrices elementales $\{E_i\}$ tales que

$$\underbrace{E_q \cdots E_2 E_1}_{E} A = C$$

Luego $Cx=0 \iff \underbrace{EA}_{C}x=0$.

Si $x$ es tal que $Ax=0 \Rightarrow EAx=0 \Rightarrow Cx=0$.

Si $x$ es tal que $Cx=0 \Rightarrow EAx=0 \Rightarrow Ax=0$.
(prop de $E$)

(Prop. $E$: $E_{ij}E_{ij}=I$, $E_i(\lambda)E_i(\lambda^{-1})=I$
$E_{ij}(-\lambda)E_{ij}(\lambda)=I$) ▨

Sistemas NO homogéneos. El sistema $Ax=b$, donde $b\neq 0$, se conoce como sistema no homogéneo.

EJERCICIO. Resolver
$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Nótese que el sistema se lee:

$$\begin{cases}x+2y=1\\-y+2z=2\\2z=3\end{cases} \Rightarrow z=3/2,\ y=1,\ x=-1$$ ▨

Nota: Resolver un sistema donde la matriz es triangular es bastante sencillo!

Matriz ampliada. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$

La matriz ampliada se define

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

EJERCICIO 1. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Solución. Consideremos el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{E_{31}(-5)}{\xrightarrow{E_{21}(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego el sistema es equivalente a $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad -y + 4z = -2 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 1,\ y = 6,\ x = -4.$ ¡Única Solución!

Nótese que $\boxed{\rho(A|b) = 3 = \rho(A)}$

EJERCICIO 2. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - 9y + 5z &= 33 \\ x + 8y - z &= -9 \\ x - y + z &= 5 \end{aligned}$$

Solución. Consideremos el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 1 & 3 & -1 & -9 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3+(-1)]{E_2+(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 12 & -6 & -42 \\ 0 & 8 & -4 & -28 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-\frac{2}{3})]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 12 & -6 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es equivalente a

$$\left.\begin{array}{r} x - 9y + 5z = 33 \\ 12y - 6z = -42 \end{array}\right|$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Sea $z = t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x - 9y = 33 - 5t \\ 12y = -42 + 6t \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{6t-42}{12} = \frac{t}{2} - \frac{7}{2} \qquad \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{t}{2}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \; x = 3/2 - t/2, \; y = t/2 - 7/2, \; z = t, \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Notése que $\boxed{\rho(A) = \rho(A|b) = 2 < 3}$

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$

1. El sistema es compatible si
$$\rho(A) = \rho(A|b)$$
2. Si el sistema es compatible se tiene que

2.1) $\rho(A) = \rho(A|b) = n \Rightarrow$ solución única

2.2) $\rho(A) = \rho(A|b) < n \Rightarrow$ infinitas soluciones.

EJERCICIO. Considere el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ -2x - y + 5z = 6. \end{cases}$$

Solución. Considere la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{array}\right)$$

El sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \\ \boxed{0 = 1} \end{cases}$$

Contradicción

$\rho(A) = 3$ y $\rho(A|b) = 4 \Rightarrow$ sistema incompatible.