Clase 5 | 21/09/2017.

De la clase pasada:

Teorema. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

1. El sistema es compatible si

$$\rho(A) = \rho(A|b)$$

2. El sistema es compatible y

2.1) $\rho(A) = \rho(A|b) = n \Rightarrow$ solución única.

2.2) $\rho(A) = \rho(A|b) < n \Rightarrow$ infinitas soluciones.

Ejercicio. Considere el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ -2x - y + 5z = 6. \end{cases}$$

Solución. Considere la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \\ \boxed{0 = -1} \end{cases}$$ Contradicción

$\rho(A) = 3 < \rho(A|b) = 4 \Rightarrow$ No existe solución.

§1.6. Matriz Inversa y operaciones elementales.

Matriz Inversa. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es invertible si $\exists\, A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Nota:

1) Si A es invertible también se llama no singular.

2) Si la inversa existe, entonces es única.

Sean A^{-1} y B matrices inversas de A. Luego

$$A^{-1} \cdot A = I_n \quad , \quad A \cdot B = I_n$$

Entonces,

$$B = \underbrace{A^{-1} A}_{I_n} \cdot B = A^{-1} (A \cdot B) = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1}$$

$$\Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow \text{inversa es única.}$$

3) No todas las matrices son invertibles.

EJEMPLO. Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si A es invertible, existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + b & 2a + b \\ 2c + d & 2c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 2c + d = 0 \\ 2c + d = 1 \end{cases} \quad \text{Contradicción}$$

$$\Rightarrow A \text{ no es invertible.}$$

Proposición. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ invertibles. Luego,

(1) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$\xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/5 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 & -2/5 \\ 2/5 & -4/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ ▨

Teorema. $A \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible $\Leftrightarrow$ $\rho(A) = n$.

EJERCICIO. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = 0$. Muestre que $I - A$ es invertible.

Solución. Nótese que

$$(I_n - A)\cdot(I + A + A^2) = I_n + \cancel{A} + \cancel{A^2} - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \underbrace{A^3}_{=0} = I_n$$

$\Rightarrow$ $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$ ▨

§1.7. Determinantes.

El det es una función

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

que a cada matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ asocia un número real.

Notación. $\det(A)$, $|A|$.

Definición.

1) $n = 1$, $A = a$: $\det(A) = a$.

(4) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}, \quad \alpha \neq 0.$

(5) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Demostración.

(1) $$(AB) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{I_n} \cdot A^{-1}$$
$$= A \cdot A^{-1} = I_n. \blacksquare$$

(2), (3), (4), (5) Ejercicio.

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ ¿Cómo encontrar su matriz inversa A^{-1}, en caso que exista?

Supongamos que existen operaciones elementales tales que

$$\underbrace{E_k \cdots E_2 E_1}_{B} A = I_n$$

Luego, $B \cdot A = I_n \Rightarrow B = E_n \cdots E_2 E_1$ es la matriz inversa de A.

Teorema. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si existe una suc. de matrices elementales $E_1, E_2, \dots E_n$ tal que

$$E_n \cdots E_2 E_1 A = I_n$$

$\Rightarrow$ A es invertible y $A^{-1} = E_n \cdots E_2 E_1$.

Ejercicio. Encuentre la matriz inversa, en caso de existir, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Considere la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2) $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\det(A) = ad - bc$.

¿Qué pasa si $n \geq 3$?

<u>Menor</u>: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se llama menor de orden ij de A, denotado por M_{ij}, al determinante de orden $n-1$ obtenido al eliminar la fila i y la columna j de A.

<u>Cofactor</u>: El cofactor de orden ij de A, denotado por C_{ij}, es el número $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

EJEMPLO. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Se tiene lo siguiente:

1) <u>M_{11}</u>. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$: $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14.$

2) <u>M_{12}</u>. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$: $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 4 \cdot 5 = -14$

3) <u>M_{13}</u> $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$: $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 10 = -14.$

Cofactores:

$$C_{11} = (-1)^2 \cdot 14 = 14.$$
$$C_{12} = (-1)^3 \cdot (-14) = 14.$$
$$C_{13} = (-1)^4 \cdot (-14) = -14. \quad \blacksquare$$

Definición (determinante) Se define

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij},$$

$i = 1, \ldots, n$ (i fijo).

EJEMPLO. Calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. Considere $\underline{i = 1}$. (fila 1). Luego,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

$$= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 14 + (-14) - 3 \cdot (-14) = 42. \ \blacksquare$$

Alternativamente

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}.$$

EJEMPLO. Considere el ejemplo anterior. Considere $j = 1$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{i1} M_{i1}$$

$$= a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 14 - 2 \cdot (-9) + 5 \cdot 2 = 42 \ \blacksquare$$